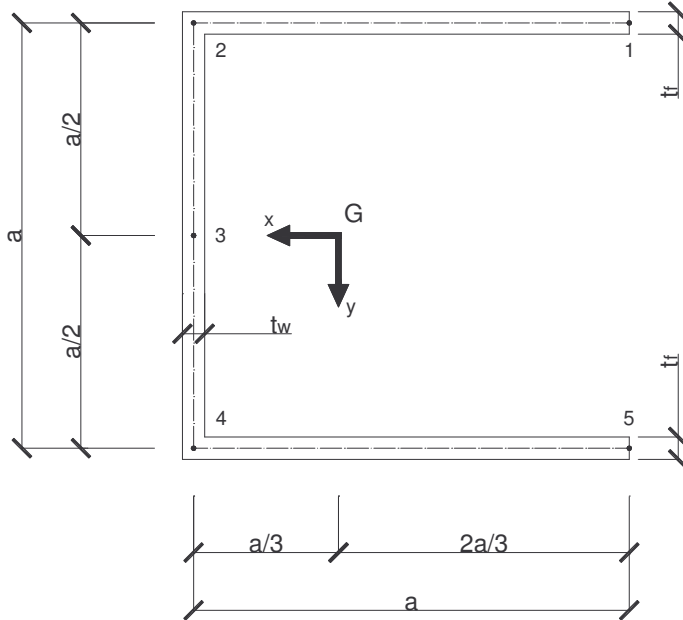


CALCOLO DELLA COSTANTE DI INGobbAMENTO

Caratteristiche geometriche e meccaniche della sezione trasversale

Spessori: $t_f = t_w = t \ll a$

Area: $A = 2 \cdot \left(a - \frac{t_w}{2} \right) \cdot t_f + (a + t_f) \cdot t_w = 3 \cdot a \cdot t$

Momento statico S_x : $S_x = \int_A y \cdot dA$

$$S_x = \left(a - \frac{t_w}{2} \right) \cdot \frac{t_f^2}{2} + \left(a - \frac{t_w}{2} \right) \cdot t_f \cdot \left(a + \frac{t_f}{2} \right) + (a + t_f) \cdot t_w \cdot \left(\frac{a}{2} + \frac{t_f}{2} \right)$$

$$S_x = \frac{3}{2} (a^2 \cdot t + a \cdot t^2)$$

Momento statico S_y : $S_y = \int_A x \cdot dA$

$$S_y = 2 \cdot \left(a - \frac{t_w}{2} \right) \cdot t_f \cdot \left(\frac{a}{2} + \frac{t_f}{2} \right) + (a + t_f) \cdot \frac{t_w^2}{2}$$

$$S_y = a^2 \cdot t + a \cdot t^2$$

Posizione del baricentro:
$$\begin{cases} y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{1}{2} \cdot (a+t) \approx \frac{a}{2} \\ x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{1}{3} \cdot (a+t) \approx \frac{a}{3} \end{cases}$$

Momento d'inerzia J_x :
$$J_x = \int_A y^2 \cdot dA$$

$$J_x = 2 \cdot \left(\frac{a \cdot t_f^3}{12} + a \cdot t_f \cdot \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right) + \frac{t_w \cdot a^3}{12}$$

$$J_x \approx \frac{7}{12} \cdot a^3 \cdot t$$

Momento d'inerzia J_y :
$$J_y = \int_A x^2 \cdot dA$$

$$J_y = \left(\frac{a \cdot t_w^3}{12} + a \cdot t_w \cdot \left(\frac{a}{3} \right)^2 \right) + 2 \cdot \left(\frac{t_f \cdot a^3}{12} + a \cdot t_f \cdot \left(\frac{a}{2} - \frac{a}{3} \right)^2 \right)$$

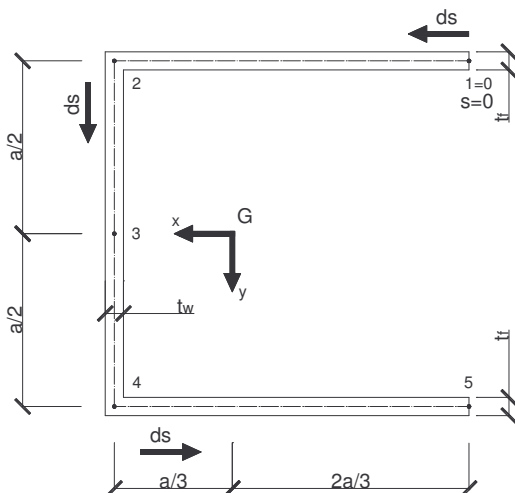
$$J_y \approx \frac{a^3 \cdot t}{3}$$

Determinazione della funzione di ingobbamento

Funzione ω riferita al baricentro:
$$\omega_G(s) = 2 \cdot \Omega_G(0) - 2 \cdot \Omega_G(s)$$

$$\begin{cases} 2 \cdot \Omega_G(0) = \frac{S_\omega}{A} \\ 2 \cdot \Omega_G(s) = \int_0^s r_n(s) \cdot ds \end{cases}$$

La funzione $\omega_G(s)$ è proporzionale a meno di una costante al doppio della area settoriale Ω_G che il raggio vettore con origine nel polo G descrive quando il punto P descrive la linea media della sezione nel verso delle s crescenti a partire dal punto 0 in cui $s=0$



Calcolo di $2 \cdot \Omega_G(s) = \int_0^s r_n(s) \cdot ds$

Dove:

r_n distanza tra il polo e l'ascissa curvilinea che percorre la sezione
 ds ascissa curvilinea

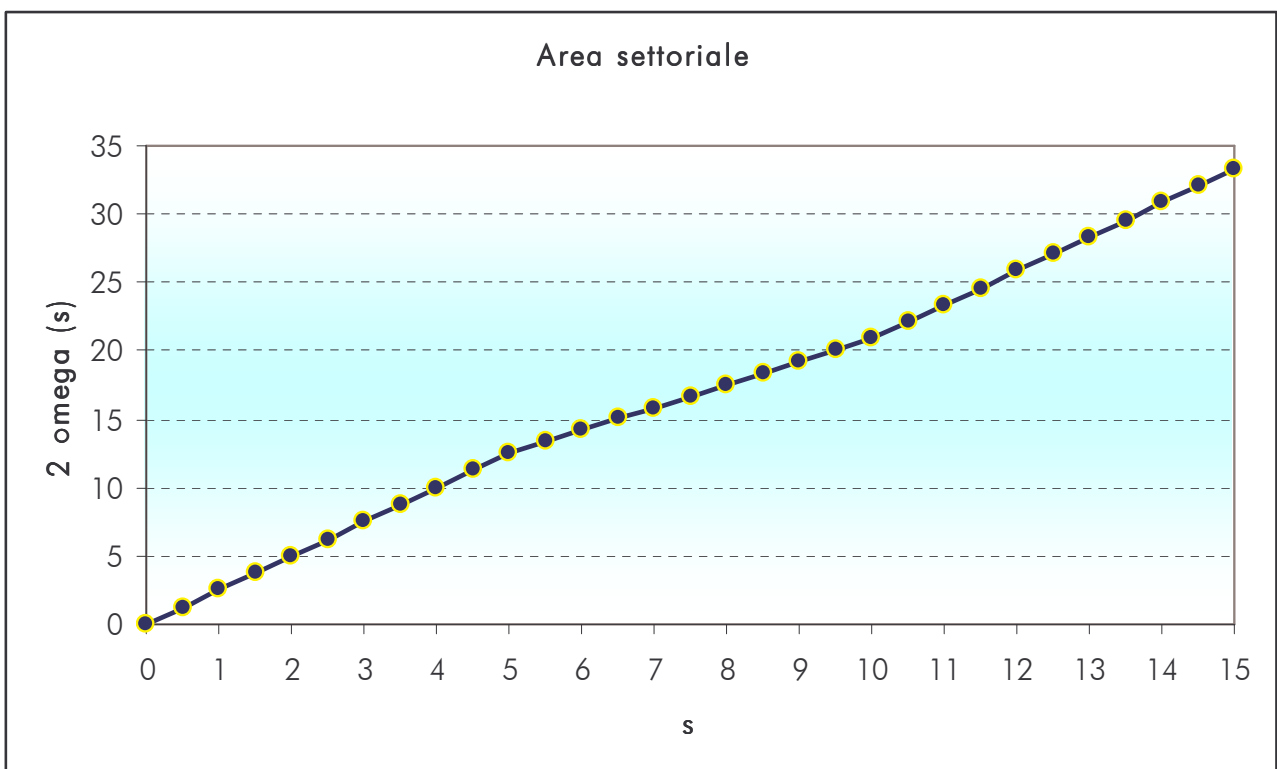
Distanze dal polo: $r_n = \begin{cases} a/2 & 0 \leq s \leq a \\ a/3 & a \leq s \leq 2a \\ a/2 & 2a \leq s \leq 3a \end{cases}$

Si considera lo sviluppo dell'ascissa curvilinea s lungo la sezione trasversale nei tre tratti, ala superiore, anima, ala inferiore, che la compongono.

Ala superiore: $\int_0^s \frac{a}{2} ds' = \frac{a}{2} \cdot s$

Anima: $\int_0^a \frac{a}{2} ds' + \int_a^s \frac{a}{3} ds' = \frac{a^2}{2} + \frac{a}{3} \cdot (s-a) = \frac{a^2}{6} + \frac{a}{3} \cdot s$

Ala inferiore: $\int_0^a \frac{a}{2} ds' + \int_a^{2a} \frac{a}{3} ds' + \int_{2a}^s \frac{a}{2} ds' = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{3} + \frac{a}{2} \cdot (s-2a) = -\frac{a^2}{6} + \frac{a}{2} \cdot s$



Il grafico rappresenta lo sviluppo dell'area settoriale lungo la traiettoria che l'ascissa curvilinea compie percorrendo la linea media della sezione trasversale.

Calcolo di:
$$S_{\omega} = \int_{\Gamma} 2 \cdot \Omega_G(s) \cdot t(s) \cdot ds'$$

Dove:

$$\Gamma = \sum_i s_i$$
 sviluppo della sezione mediana

$$S_{\omega} = \int_0^{3a} 2 \cdot \Omega_G(s) \cdot t(s) \cdot ds$$

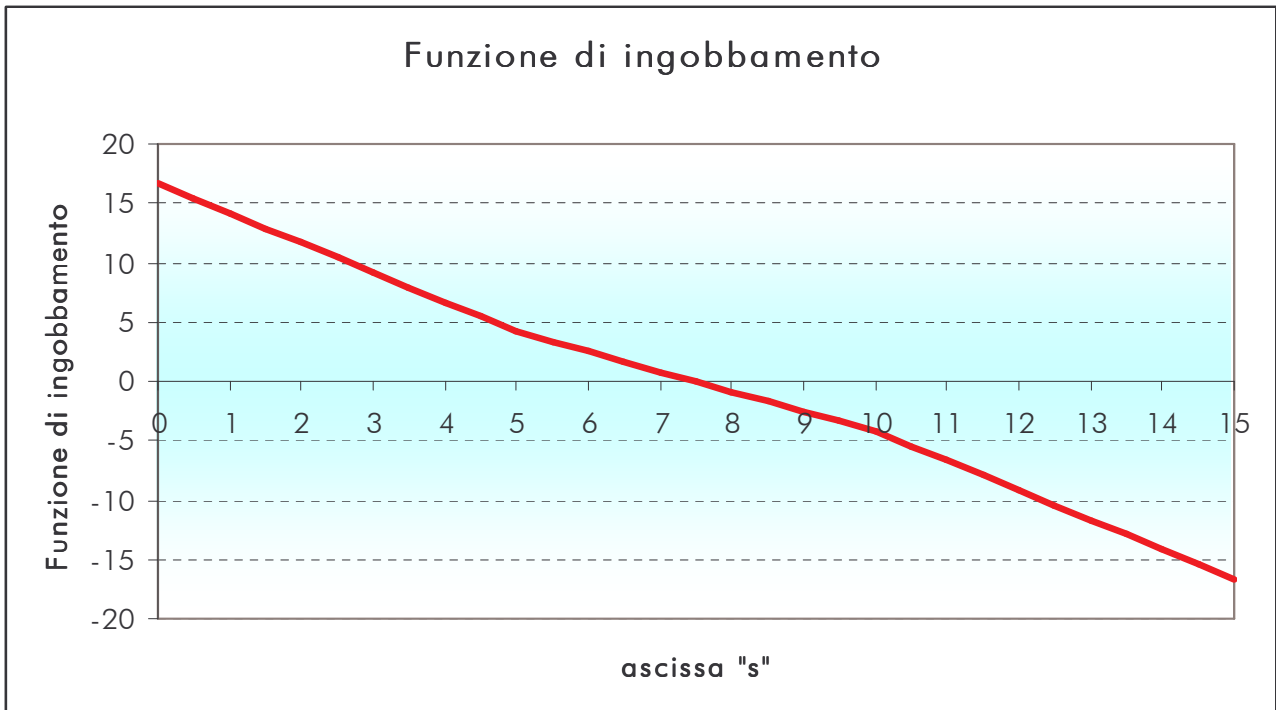
$$S_{\omega} = \int_0^a \frac{a}{2} \cdot s \cdot t_f \cdot ds + \int_a^{2a} \left(\frac{a^2}{6} + \frac{a}{3} \cdot s \right) \cdot t_w \cdot ds + \int_{2a}^{3a} \left(-\frac{a^2}{6} + \frac{a}{2} \cdot s \right) \cdot t_f \cdot ds$$

$$S_{\omega} = \left[\frac{a}{2} \cdot t \cdot \frac{s^2}{2} \right]_0^a + \left[\frac{a^2}{6} \cdot t \cdot s + \frac{a}{3} \cdot \frac{s^2}{2} \cdot t \right]_a^{2a} + \left[-\frac{a^2}{6} \cdot t \cdot s + \frac{a}{2} \cdot \frac{s^2}{2} \cdot t \right]_{2a}^{3a} = 2 \cdot a^3 \cdot t$$

La costante risulta:
$$2 \cdot \Omega_G(s) = \frac{2 \cdot a^3 \cdot t}{3 \cdot a \cdot t} = \frac{2}{3} \cdot a^2$$

La funzione di ingobbamento rispetto al baricentro risulta:
$$\omega_G(s) = 2 \cdot \Omega_G(0) - 2 \cdot \Omega_G(s)$$

$$\omega_G(s) = \begin{cases} \frac{2}{3} \cdot a^2 - \frac{a}{2} \cdot s & 0 \leq s \leq a \\ \frac{2}{3} \cdot a^2 - \frac{a^2}{6} - \frac{a}{3} \cdot s & a \leq s \leq 2a \\ \frac{2}{3} \cdot a^2 + \frac{a^2}{6} - \frac{a}{2} \cdot s & 2a \leq s \leq 3a \end{cases}$$



Determinazione del centro di taglio rispetto al baricentro della sezione

Le coordinate del centro di taglio sono una proprietà geometrica della sezione, e come tali sono indipendenti dallo stato di sollecitazione della stessa. Tuttavia essendo per definizione, il centro di taglio quel punto in cui è applicata la risultante delle tensioni tangenziali agenti sulla sezione, si può asserire che se la forza di taglio è applicata nel centro di taglio non si genera momento torcente, diversamente la sezione è soggetta anche a torsione.

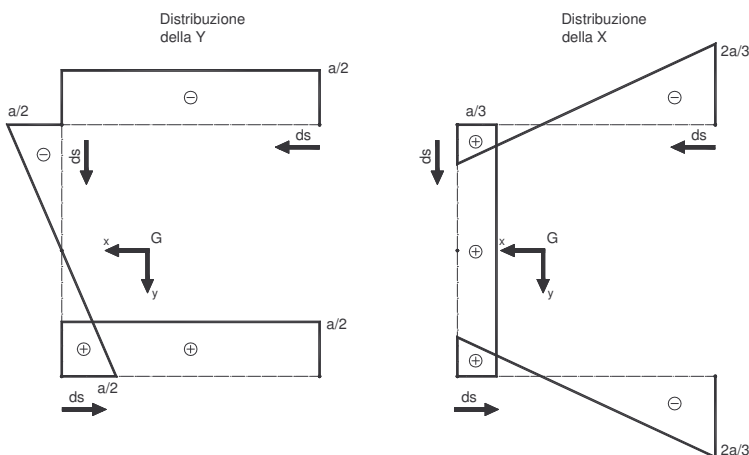
$$x_{C.T.} = -\frac{\int_{\tilde{A}} \omega_G(s) \cdot y(s) \cdot d\tilde{A}}{J_{xx}} = -\frac{\int_{\Gamma} \omega_G(s) \cdot y(s) \cdot t \cdot ds}{J_{xx}}$$

$$y_{C.T.} = \frac{\int_{\tilde{A}} \omega_G(s) \cdot x(s) \cdot d\tilde{A}}{J_{yy}} = \frac{\int_{\Gamma} \omega_G(s) \cdot x(s) \cdot t \cdot ds}{J_{yy}}$$

Se la sezione possiede due assi di simmetria il centro di taglio giace all'incrocio degli stessi e come tale coincide con il baricentro della sezione.

Se la sezione possiede un asse di simmetria il centro di taglio giace su quel asse.

Con i termini $y(s)$ e $x(s)$ si intendono le funzioni di distribuzione delle coordinate y e x rispetto al baricentro come illustrato in figura.



$$y(s) = \begin{cases} -\frac{a}{2} & 0 \leq s \leq a \\ s - \frac{3}{2} \cdot a & a \leq s \leq 2a \\ +\frac{a}{2} & 2a \leq s \leq 3a \end{cases}$$

$$x(s) = \begin{cases} s - \frac{2}{3} \cdot a & 0 \leq s \leq a \\ \frac{a}{3} & a \leq s \leq 2a \\ -s + \frac{7}{3} \cdot a & 2a \leq s \leq 3a \end{cases}$$

Le funzioni di distribuzione sono sempre rette (eccetto in sezioni curve) per cui si determinano nel seguente modo:

Espressione della retta: $y(s) = c_1 \cdot s + c_2$

In questa si vanno a sostituire le coordinate dei punti riferiti all'ascissa curvilinea:

$$\left(a; -\frac{a}{2}\right) \text{ e } \left(2 \cdot a; +\frac{a}{2}\right) \quad \text{per la funzione } y(s) \text{ dell'anima}$$

$$\begin{cases} -\frac{a}{2} = a \cdot c_1 + c_2 \\ \frac{a}{2} = 2 \cdot a \cdot c_1 + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -\frac{3}{2} \cdot a \end{cases}$$

$$\left(0; -\frac{2}{3} \cdot a\right) \text{ e } \left(a; \frac{a}{3}\right) \quad \text{per la funzione } x(s) \text{ dell'ala superiore}$$

$$\begin{cases} -\frac{2}{3} \cdot a = c_2 \\ \frac{a}{3} = a \cdot c_1 - \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -\frac{2}{3} \cdot a \end{cases}$$

$$\left(2 \cdot a; \frac{a}{3}\right) \text{ e } \left(3 \cdot a; -\frac{2}{3} \cdot a\right) \quad \text{per la funzione } x(s) \text{ dell'ala inferiore}$$

$$\begin{cases} \frac{a}{3} = 2 \cdot a \cdot c_1 + c_2 \\ -\frac{2}{3} \cdot a = 3 \cdot a \cdot c_1 + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = \frac{7}{3} \cdot a \end{cases}$$

Vista la simmetria della sezione rispetto all'asse x , il centro di taglio giace su tale asse per cui $y_{C.T.} \equiv y_G$, per cui si calcola solamente l'ascissa $x_{C.T.}$ del centro di taglio rispetto al baricentro.

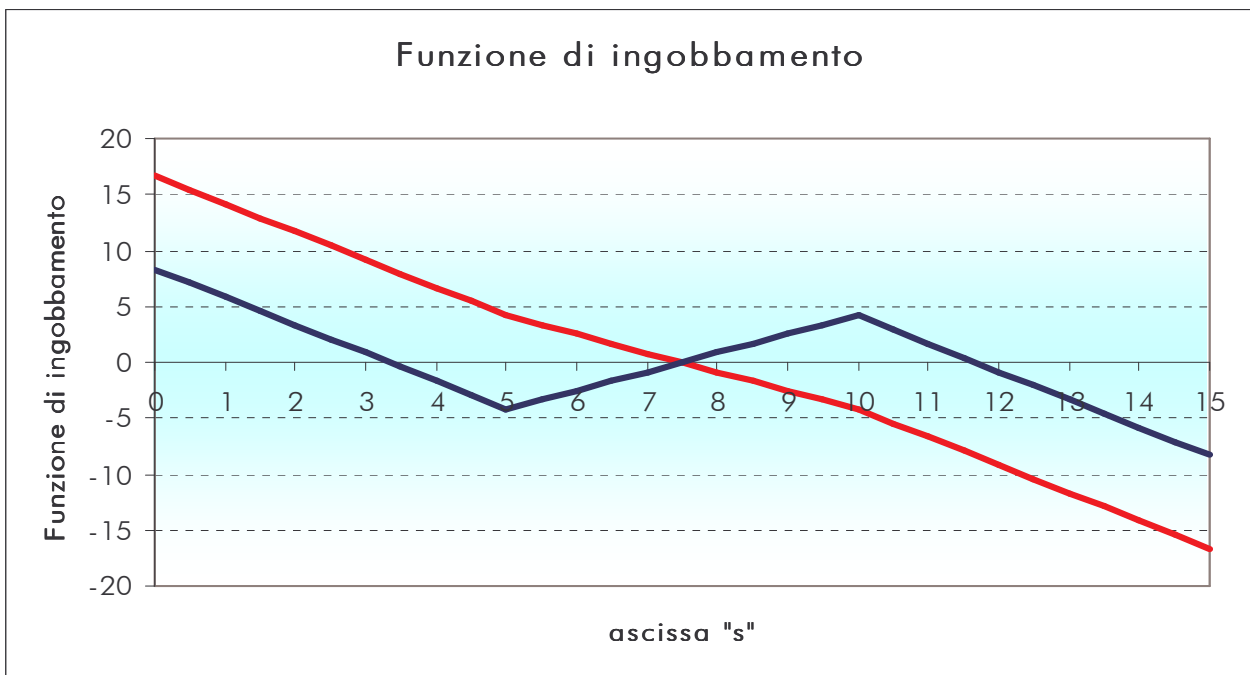
$$x_{C.T.} = -\frac{\int_{\Gamma} \omega_G(s) \cdot y(s) \cdot t \cdot ds}{J_{xx}}$$

$$x_{C.T.} = -\frac{1}{\frac{7}{12} \cdot a^3 \cdot t} \cdot \left[\int_0^a \left(\frac{2}{3}a^2 - \frac{a}{2}s\right) \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) \cdot t ds + \int_a^{2a} \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a}{3}s\right) \cdot \left(s - \frac{3}{2}a\right) \cdot t ds + \int_{2a}^{3a} \left(\frac{5}{6}a^2 - \frac{a}{2}s\right) \cdot \frac{a}{s} \cdot t ds \right]$$

$$x_{C.T.} = \frac{16}{21} \cdot a$$

Si noti che moltiplicando le funzioni $y(s)$ per $x(s)$ si ottiene la funzione $\tilde{\omega}_G(s)$ traslata, che si trova generalmente tabellata sui manuali.

$$\tilde{\omega}_G(s) = \begin{cases} -\frac{a}{2} \cdot s + \frac{a^2}{3} & 0 \leq s \leq a \\ \frac{a}{3} \cdot s - \frac{a^2}{2} & a \leq s \leq 2a \\ -\frac{a}{2} \cdot s + \frac{7}{6} \cdot a^2 & 2a \leq s \leq 3a \end{cases}$$



Integrando la funzione di ingobbamento $\tilde{\omega}_G(s)$ si ottiene il momento statico d'ingobbamento:

$$S_{\omega,G} = \int_{\Gamma} \tilde{\omega}_G(s) \cdot t(s) \cdot ds$$

Ala superiore:
$$S_{\omega,G} = \int_0^s \left(-\frac{a}{2} \cdot s + \frac{a^2}{3} \right) t_f ds'$$

$$S_{\omega,G} = \left(-\frac{a}{4} \cdot s^2 + \frac{a^2}{3} \cdot s \right) \cdot t$$

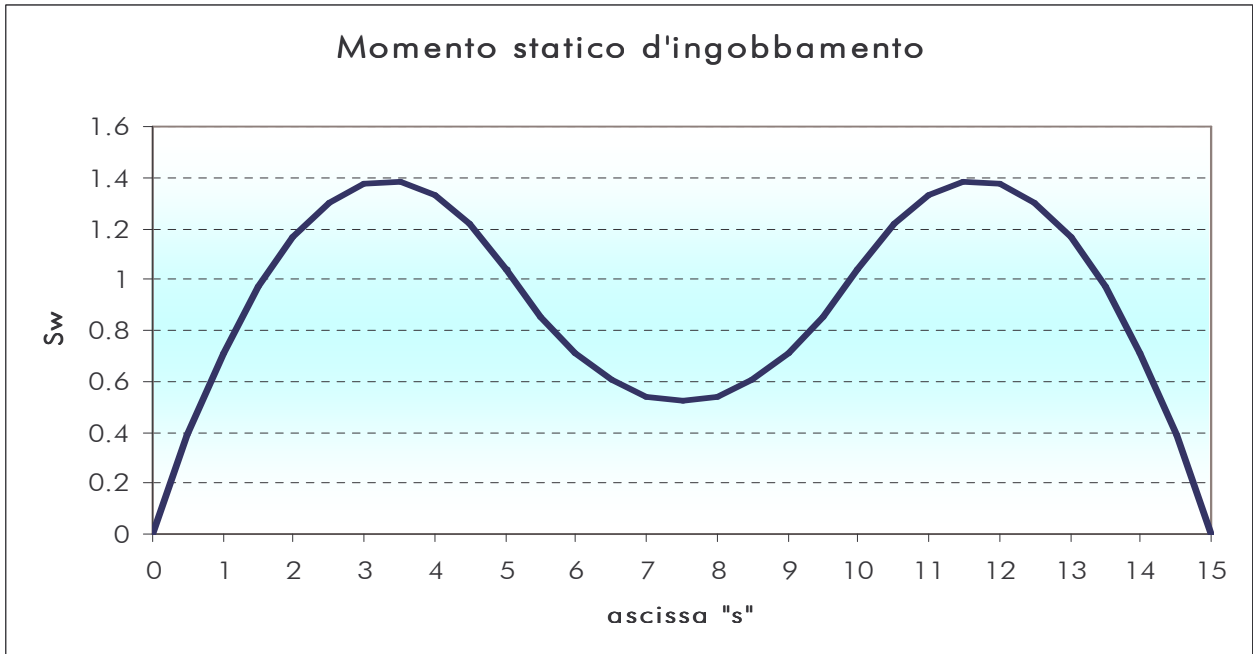
Anima:
$$S_{\omega,G} = \int_0^a \left(-\frac{a}{2} \cdot s + \frac{a^2}{3} \right) t_f ds' + \int_a^s \left(\frac{a}{3} \cdot s - \frac{a^2}{2} \right) t_w ds'$$

$$S_{\omega,G} = \frac{a^3}{12} \cdot t + \left(\frac{a}{6} \cdot s^2 - \frac{a^2}{2} \cdot s + \frac{a^3}{3} \right) \cdot t$$

Ala inferiore:

$$S_{\omega,G} = \int_0^a \left(-\frac{a}{2} \cdot s + \frac{a^2}{3} \right) t_f ds' + \int_a^{2a} \left(\frac{a}{3} \cdot s - \frac{a^2}{2} \right) t_w ds' + \int_{2a}^s \left(-\frac{a}{2} \cdot s + \frac{7}{6} \cdot a^2 \right) t_f ds$$

$$S_{\omega,G} = \frac{a^3}{12} \cdot t + 0 + \left(-\frac{a}{4} \cdot s^2 + \frac{7}{6} \cdot a^2 \cdot s - \frac{4}{3} \cdot a^3 \right) \cdot t$$



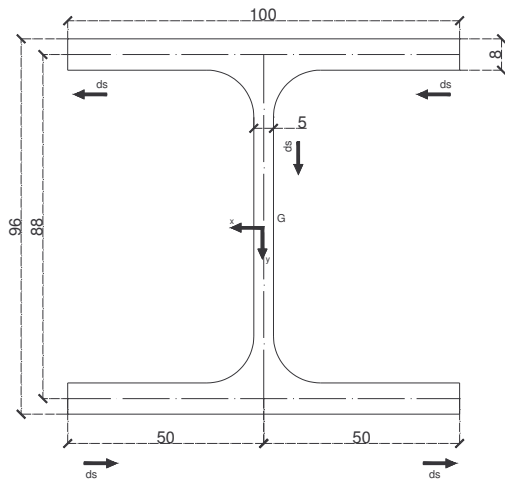
Integrando due volte la funzione $\tilde{\omega}_G(s)$ si ottiene la costante di ingobbamento, detta altresì costante di warping o momento d'inerzia settoriale.

$$J_\omega = C_w = I_w = \int_{\Gamma} \tilde{\omega}^2(s) \cdot t(s) \cdot ds = \int_0^{3a} \tilde{\omega}^2(s) \cdot t(s) \cdot ds$$

$$J_\omega = \int_0^a \left(-\frac{a}{2} \cdot s + \frac{a^2}{3} \right)^2 \cdot t_f \cdot ds + \int_a^{2a} \left(\frac{a}{3} \cdot s - \frac{a^2}{2} \right)^2 \cdot t_w \cdot ds + \int_{2a}^{3a} \left(-\frac{a}{2} \cdot s + \frac{7}{6} \cdot a^2 \right)^2 \cdot t_f \cdot ds$$

$$J_\omega = t \cdot \left[\int_0^a \left(-\frac{a}{2} \cdot s + \frac{a^2}{3} \right)^2 \cdot ds + \int_a^{2a} \left(\frac{a}{3} \cdot s - \frac{a^2}{2} \right)^2 \cdot ds + \int_{2a}^{3a} \left(-\frac{a}{2} \cdot s + \frac{7}{6} \cdot a^2 \right)^2 \cdot ds \right]$$

Esempio di calcolo per il profilo HE 100 A



Si considera che l'ascissa curvilinea percorra tutta l'ala superiore, poi l'anima, poi l'ala inferiore; il verso è quello antiorario indicato in figura.

Di seguito si riportano le funzioni di variazione delle coordinate:

$$x(s) = \begin{cases} s - 5 & 0 \leq s \leq 10 \\ 0 & 10 \leq s \leq 18.8 \\ -s + 23.8 & 18.8 \leq s \leq 28.8 \end{cases} \quad y(s) = \begin{cases} -4.4 & 0 \leq s \leq 10 \\ s - 14.4 & 10 \leq s \leq 18.8 \\ 4.4 & 18.8 \leq s \leq 28.8 \end{cases} \quad \begin{matrix} [cm] \\ [cm] \\ [cm] \end{matrix}$$

La funzione di ingobbamento $\omega(s) = x(s) \cdot y(s)$ risulta:

$$\omega(s) = \begin{cases} -4.4 \cdot s + 22 & 0 \leq s \leq 10 \\ 0 & 10 \leq s \leq 18.8 \\ -4.4 \cdot s + 104.72 & 18.8 \leq s \leq 28.8 \end{cases} \quad \begin{matrix} [cm^2] \\ [cm^2] \\ [cm^2] \end{matrix}$$

Il momento statico d'ingobbamento in $[cm^4]$ risulta:

$$\text{Ala superiore:} \quad S_{\omega} = \int_0^s (-4.4 \cdot s + 22) \cdot 0.8 ds$$

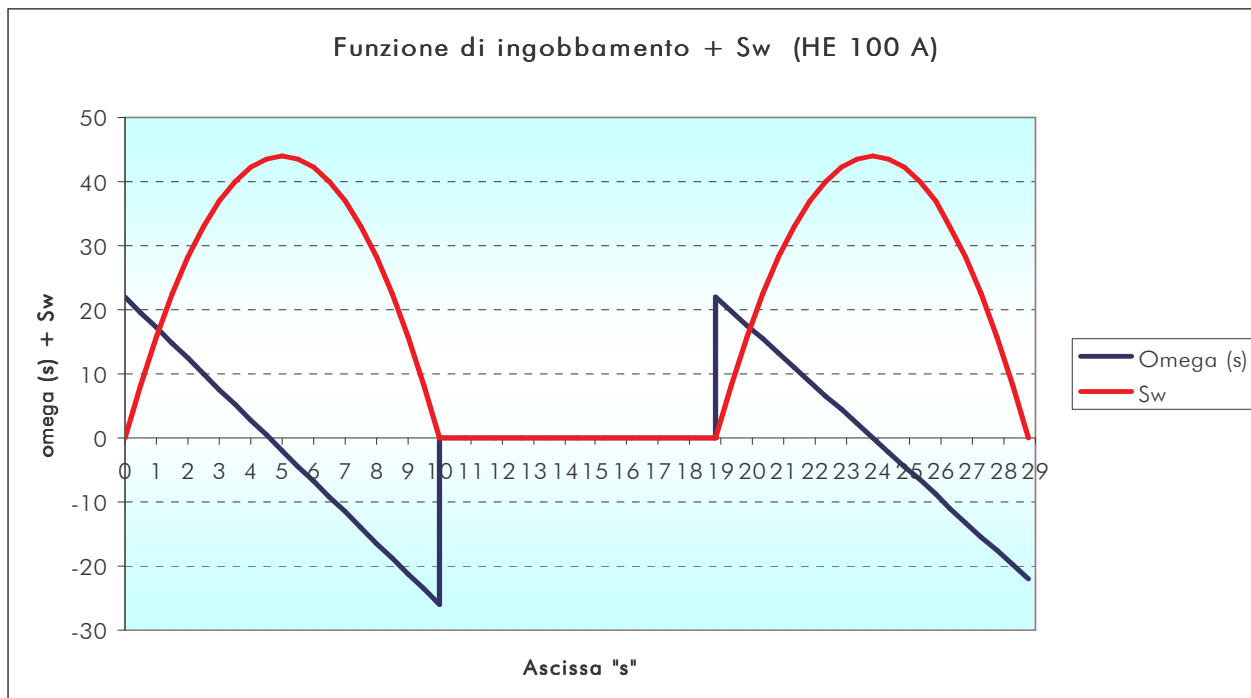
$$\text{Anima:} \quad S_{\omega} = \int_0^{10} (-4.4 \cdot s + 22) \cdot 0.8 ds + \int_{10}^s (0) \cdot 0.5 ds$$

$$\text{Ala inferiore:} \quad S_{\omega} = \int_0^{10} (-4.4 \cdot s + 22) \cdot 0.8 ds + \int_{10}^{18.8} (0) \cdot 0.5 ds + \int_{18.8}^s (-4.4 \cdot s + 104.72) \cdot 0.8 ds$$

Il momento d'inerzia settoriale in $[cm^6]$ vale:

$$J_{\omega} = \int_0^{10} (-4.4 \cdot s + 22)^2 \cdot 0.8 \cdot ds + \int_{18.8}^{28.8} (-4.4 \cdot s + 104.72)^2 \cdot 0.8 ds = 2581$$

I valori puntuali e l'andamento lungo lo sviluppo dell'ascissa curvilinea, di $\omega(s)$ e di S_ω sono di seguito tabellati.



s	$\omega(s)$	$S\omega(s)$
0	22	0
0.5	19.6	8.36
1	17.2	15.84
1.5	14.8	22.44
2	12.4	28.16
2.5	10	33
3	7.6	36.96
3.5	5.2	40.04
4	2.8	42.24
4.5	0.4	43.56
5	-2	44
5.5	-4.4	43.56
6	-6.8	42.24
6.5	-9.2	40.04
7	-11.6	36.96
7.5	-14	33
8	-16.4	28.16
8.5	-18.8	22.44
9	-21.2	15.84
9.5	-23.6	8.36
10	-26	0
10	0	0
10.88	0	0
11.76	0	0
12.64	0	0
13.52	0	0
14.4	0	0

15.28	0	0
16.16	0	0
17.04	0	0
17.92	0	0
18.8	0	0
18.8	22	0
19.3	19.8	8.36
19.8	17.6	15.84
20.3	15.4	22.44
20.8	13.2	28.16
21.3	11	33
21.8	8.8	36.96
22.3	6.6	40.04
22.8	4.4	42.24
23.3	2.2	43.56
23.8	0	44
24.3	-2.2	43.56
24.8	-4.4	42.24
25.3	-6.6	40.04
25.8	-8.8	36.96
26.3	-11	33
26.8	-13.2	28.16
27.3	-15.4	22.44
27.8	-17.6	15.84
28.3	-19.8	8.36
28.8	-22	0

