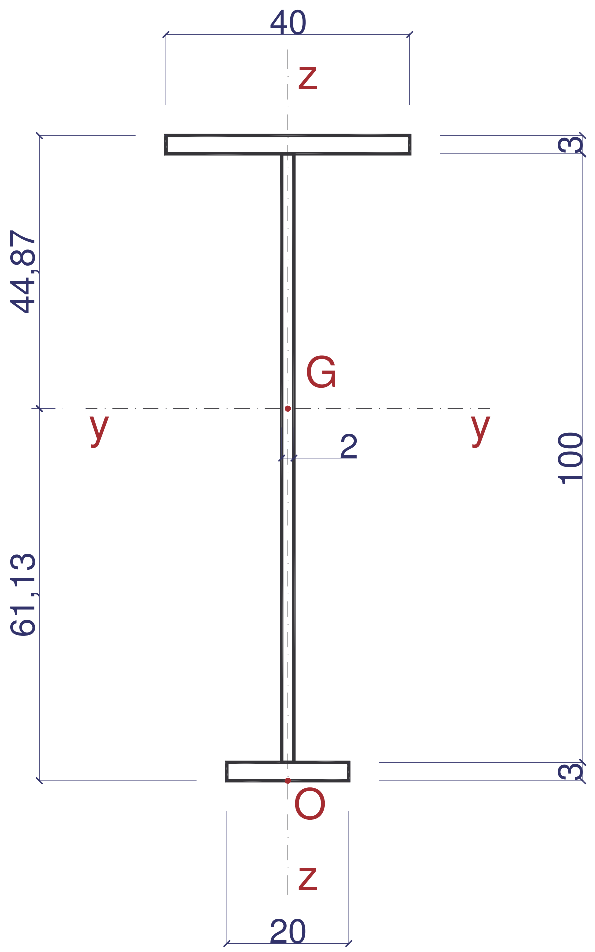
GEOMETRIA DELLE AREE

Di seguito si illustra il metodo di calcolo proposto nell'UNI ENV 1993 –1 –1 per la determinazione dei valori statici di una sezione laminata:



i. Area della sezione trasversale

$$A = \sum_i A_i$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = (20 \cdot 3) + (100 \cdot 2) + (40 \cdot 3) = 380 \qquad [cm^2]$$

ii. Momento statico rispetto a O

$$S_y\big|_O = \int_A z \cdot dA = \sum_i A_i \cdot z_i$$

$$S_z\big|_O = \int_A y \cdot dA = \sum_i A_i \cdot y_i$$

$$S_y\big|_O = (20 \cdot 3) \cdot \frac{3}{2} + (100 \cdot 2) \cdot \left(3 + \frac{100}{2}\right) + (40 \cdot 3) \cdot \left(3 + 100 + \frac{3}{2}\right) = 23230 \qquad [cm^3]$$

$$S_z\big|_O = 0 \qquad [cm^3]$$

iii. Posizione del baricentro rispetto a O

$$y_G\big|_O = \frac{\sum_i A_i \cdot y_i}{A}$$
$$z_G\big|_O = \frac{\sum_i A_i \cdot z_i}{A}$$

$$y_G\big|_O = 0$$
$$z_G\big|_O = \frac{23230}{380} = 61.13 \qquad [cm]$$

iv. Momenti principali d'inerzia

$$I_{yy} = \int_A z^2 \cdot dA$$ attorno all'asse forte y – y

$$I_{zz} = \int_A y^2 \cdot dA$$ attorno all'asse debole z – z

Teorema degli assi paralleli:
$$\begin{cases} I_{yy.G} = \sum I_{yy.G'} + A\cdot\left(z_G\big|_O - z_{G'}\big|_O\right)^2 \\ I_{zz.G} = \sum I_{zz.G'} + A\cdot\left(y_G\big|_O - y_{G'}\big|_O\right)^2 \end{cases}$$

Con G si indica il baricentro della sezione totale, mentre con G' si indicano i baricentri delle varie sezioni rettangolari costituenti la sezione totale.

$$I_{yy.G} = \frac{20\cdot 3^3}{12} + 20\cdot 3\cdot(61.13-1.5)^2 + \frac{2\cdot 100^3}{12} + 2\cdot 100\cdot(61.13-53)^2 + \frac{40\cdot 3^3}{12} + 40\cdot 3\cdot(61.13-104.5)^2$$

$$I_{yy.G} = 619080 \qquad [cm^4]$$

$$I_{zz.G} = \frac{3\cdot 20^3}{12} + \frac{100\cdot 2^3}{12} + \frac{3\cdot 40^3}{12} = 18066.67 \qquad [cm^4]$$

v. Momenti principali d'inerzia

I momenti d'inerzia variano al variare dell'orientamento della base posta nel baricentro secondo la legge di rotazione dei tensori doppie simmetrici:

$$\begin{bmatrix} I_{uu} & I_{uv} \\ I_{vu} & I_{vv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{yy.G} & 0 \\ 0 & I_{zz.G} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

vi. Moduli di resistenza elastici

$$W_{el.y} = \frac{I_{yy.G}}{z_{\max}}$$
$$W_{el.z} = \frac{I_{zz.G}}{y_{\max}}$$

Dove $z_{\max}$ e $y_{\max}$ rappresentano le massime distanze tra il baricentro G e i lembi esterni della sezione.

$$W_{el.y} = \frac{619080}{61.13} = 10127.27 \qquad [cm^3]$$
$$W_{el.z} = \frac{18066.67}{20} = 903.33 \qquad [cm^3]$$

vii. Moduli di resistenza plastici

$$W_{pl.y} = 2 \cdot S_y^*\Big|_G$$
$$W_{pl.z} = 2 \cdot S_z^*\Big|_G$$

Dove $S^*\Big|_G$ rappresenta il momento statico della sezione al di sopra o al di sotto del baricentro G calcolato rispetto al baricentro stesso; è indifferente scegliere la sezione superiore o inferiore.

$$W_{pl.y} = 2 \cdot \left\{(40 \cdot 3) \cdot (44.87 - 1.5) + [(44.87 - 3) \cdot 2] \cdot \frac{44.87 - 3}{2}\right\} = 13915 \qquad [cm^3]$$
$$W_{pl.z} = 2 \cdot [(20 \cdot 3) \cdot 10 + (100 \cdot 1) \cdot 0.5 + 10 \cdot 3 \cdot 5] = 1600 \qquad [cm^3]$$

viii. Raggi d'inerzia

$$i_y = \sqrt{\frac{I_{yy.G}}{A}}$$
$$i_z = \sqrt{\frac{I_{zz.G}}{A}}$$

$$i_y = \sqrt{\frac{619080}{380}} = 40.36 \qquad [cm]$$
$$i_z = \sqrt{\frac{18066.67}{380}} = 6.89 \qquad [cm]$$

ix. Aree resistenti a taglio

$$A_{V.y} = \sum_i d \cdot t_w$$
$$A_{V.z} = A - A_{V.y}$$

Dove:
$$d = h - \sum t_f$$

h altezza totale della sezione
t_f spessore delle ali
t_w spessore dell'anima

$$A_{V.y} = (106 - 2 \cdot 3) \cdot 2 = 200 \qquad [cm^2]$$
$$A_{V.z} = 380 - 200 = 180 \qquad [cm^2]$$

x. Costante torsionale

$$I_t = \frac{1}{3} \cdot \sum_i b_i \cdot t_i^3$$

b_i larghezza dell'i-esimo piatto della sezione traversale
t_i spessore dell'i-esimo piatto della sezione traversale

$$I_t = \frac{1}{3} \cdot \left[40 \cdot 3^3 + 100 \cdot 2^3 + 20 \cdot 3^3\right] = 807 \qquad [cm^4]$$

xi. Ordinata del centro di taglio

$$z_S\big|_G = \frac{h_1 \cdot I_{z.1} - h_2 \cdot I_{z.2}}{I_{z.1} + I_{z.2}}$$

dove:
h_1 è la distanza tra l'asse dell'ala superiore e il baricentro G;
h_2 è la distanza tra l'asse dell'ala inferiore e il baricentro G;
$I_{z.1}$ è il momento di inerzia dell'area dell'ala superiore rispetto all'asse minore z – z della sezione trasversale totale;
$I_{z.2}$ è il momento di inerzia dell'area dell'ala inferiore rispetto all'asse minore z – z della sezione trasversale totale.

$$h_1 = 44.87 \qquad [cm]$$
$$h_2 = 61.13 \qquad [cm]$$

$$I_{z.1} = \frac{3 \cdot 40^3}{12} = 16000 \qquad [cm^4]$$
$$I_{z.2} = \frac{3 \cdot 20^3}{12} = 2000 \qquad [cm^4]$$

$$z_S\big|_G = \frac{44.87 \cdot 16000 - 61.13 \cdot 2000}{16000 + 2000} = 33.09 \qquad [cm]$$

xii. Costante di ingobbamento (warping)

$$I_w = \frac{(h - t_f)^2 \cdot I_{z.1} \cdot I_{z.2}}{I_{z.1} + I_{z.2}}$$

$$I_w = \frac{(106 - 3)^2 \cdot 16000 \cdot 2000}{16000 + 2000} = 18860444 \qquad [cm^6]$$