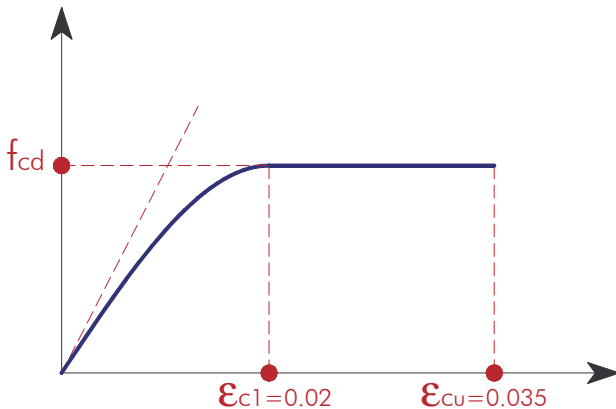


RESISTENZE DI CALCOLO DEI MATERIALI – (D.M. 9/1/1996)

Calcestruzzo: Si adotta il diagramma parabola – rettangolo.



Deformazione per contrazione uniforme:

$$\varepsilon_{c1} = 0.02$$

Deformazione ultima a rottura:

$$\varepsilon_{cu} = 0.035$$

Resistenza caratteristica cubica a compressione:

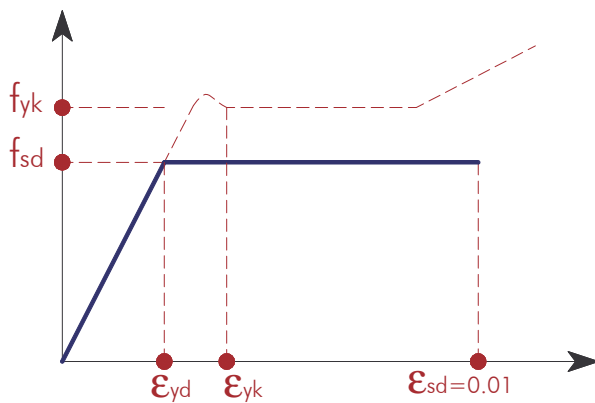
$$R_{ck}$$

Resistenza di calcolo del calcestruzzo:

$$f_{cd} = \alpha \cdot \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = 0.85 \cdot \frac{0.83 \cdot R_{ck}}{1.6}$$

$\alpha = 0.85$ carichi di lungo periodo.

Acciaio: Si adotta il diagramma bilineare (elastico perfettamente plastico).



Resistenza caratteristica dell'acciaio:

$$f_{yk}$$

Resistenza di calcolo dell'acciaio:

$$f_{sd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{f_{yk}}{1.15}$$

Deformazione a snervamento:

$$\varepsilon_{yd} = \frac{f_{sd}}{E_s}$$

Deformazione ultima a rottura:

$$\varepsilon_{sd} = 0.01$$

FLESSIONE SEMPLICE S.L.U

Si consideri una sezione rettangolare a semplice armatura in condizioni di rottura: la sezione può avere tre differenti modi di collasso:

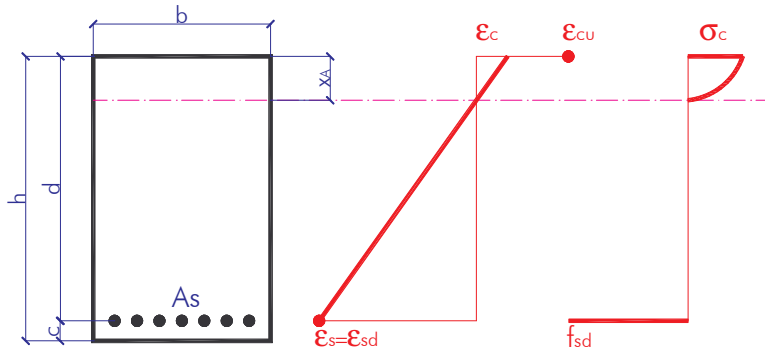
Campo di rottura A

Le armature raggiungono la deformazione convenzionale a rottura:

$$\varepsilon_s = \varepsilon_{sd} = 0.01$$

La contrazione del calcestruzzo è inferiore al limite ultimo:

$$\varepsilon_c < \varepsilon_{cu} = 0.0035$$



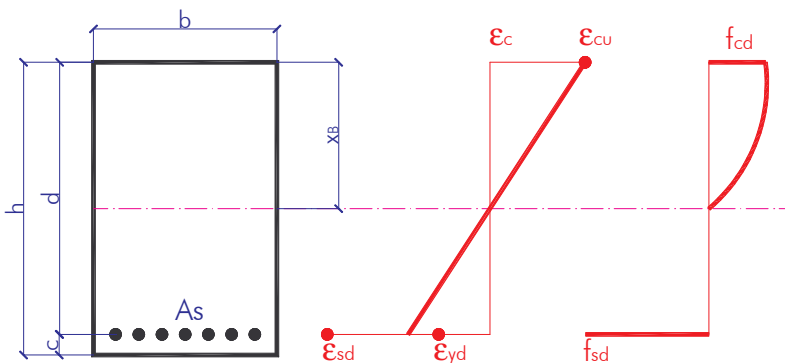
Campo di rottura B

Le armature superano il limite di snervamento:

$$\varepsilon_{yd} < \varepsilon_s < \varepsilon_{sd}$$

La contrazione del calcestruzzo raggiunge il limite di rottura:

$$\varepsilon_c = \varepsilon_{cu} = 0.0035$$



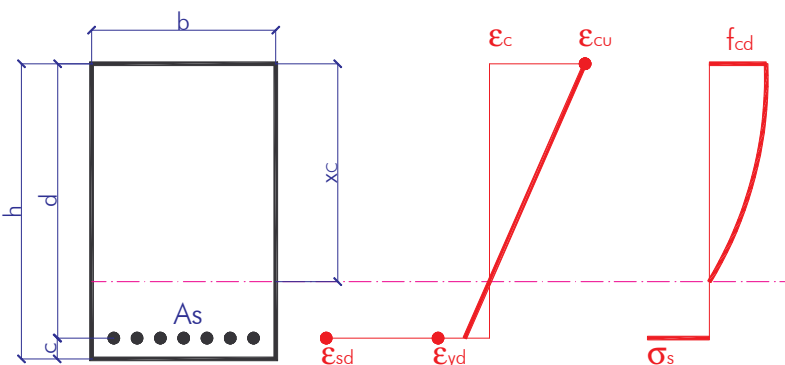
Campo di rottura C

Le armature sono ancora in fase elastica:

$$\varepsilon_s < \varepsilon_{yd}$$

La contrazione del calcestruzzo raggiunge il limite di rottura:

$$\varepsilon_c = \varepsilon_{cu} = 0.0035$$



SEZIONE RETTANGOLARE SEMPLICEMENTE ARMATA

Calcolo della sezione semplicemente armata - campo A

Il campo delle deboli armature si ha quando :

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi < \xi_A = 0.2593 \\ x < x_A = \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_{sd}} \cdot d \end{array} \right.$$

Dalla linearità del diagramma delle deformazioni si ha:

$$\epsilon_c : x = \epsilon_{sd} : (d - x) \quad \xrightarrow{\text{deformazione del cls}} \quad \epsilon_c = \frac{x}{d - x} \cdot \epsilon_{sd}$$

$$\bar{\epsilon}_c = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{cu}} = \frac{x}{d - x} \cdot \frac{\epsilon_{sd}}{\epsilon_c} = \frac{x}{d - x} \cdot \frac{0.01}{0.0035} = 2.86 \cdot \frac{x}{d - x}$$

Determinazione dei coefficienti β e κ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta = (1.6 - 0.8 \cdot \bar{\epsilon}_c) \cdot \bar{\epsilon}_c \\ \kappa = 0.33 + 0.07 \cdot \bar{\epsilon}_c \end{array} \right.$$

Equilibrio alla traslazione

$$A_s \cdot f_{sd} - \beta \cdot x \cdot b \cdot f_{cd} = 0$$

Determinazione del momento resistente:

$$M_{rd} = A_s \cdot f_{sd} \cdot (d - \kappa \cdot x)$$

Casi particolari:

1)

Se $0.050 \leq \omega_s \leq 0.21$

Posizione dell'asse neutro:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi \cong 0.066 + 0.924 \cdot \omega_s \\ x = \xi \cdot d \end{array} \right.$$

Determinazione dei coefficienti β e κ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta = \frac{4.57 - 11.1 \cdot \xi}{(1 - \xi)^2} \cdot \xi \\ \kappa = \frac{0.33 - 0.13 \cdot \xi}{(1 - \xi)} \end{array} \right.$$

Determinazione del momento resistente:

$$M_{rd} = A_s \cdot f_{sd} \cdot (d - \kappa \cdot x)$$

2)

Se $\zeta = 1 - \kappa \cdot \xi \leq 0.96$ allora posso usare le formule di rottura in campo B.

Calcolo della sezione semplicemente armata - campo B

Determinazione dei coefficienti β_0 e κ_0 :

$$\begin{cases} \beta_0 = (1.6 - 0.8 \cdot 1) \cdot 1 = 0.8 \\ \kappa_0 = 0.33 + 0.07 \cdot 1 = 0.4 \end{cases}$$

Determinazione della posizione dell'asse neutro:

Equilibrio alla traslazione $Z - C = 0$

$$A_s \cdot f_{sd} - \beta_0 \cdot x \cdot b \cdot f_{cd} = 0 \quad \xrightarrow{\text{posizione asse neutro}} \quad x = \frac{A_s \cdot f_{sd}}{\beta_0 \cdot b \cdot f_{cd}} = \frac{1}{\beta_0} \cdot \omega_s \cdot d = \xi \cdot d$$

$$\omega_s = \frac{A_s \cdot f_{sd}}{b \cdot d \cdot f_{cd}} \quad \text{rapporto meccanico dell'armatura}$$

$$\xi = \frac{\omega_s}{\beta_0} = \frac{x}{d} \quad \text{posizione adimensionalizzata dell'asse neutro}$$

Prima di procedere alla determinazione del momento resistente è necessario assicurarsi di aver calcolato in modo corretto il campo di rottura del calcestruzzo:

$$\xi_A \leq \xi \leq \xi_C$$

Determinazione del momento resistente: $M_{rd} = A_s \cdot f_{sd} \cdot (d - \kappa_0 \cdot x)$

Calcolo della sezione semplicemente armata - campo C

Il campo delle forti armature si ha quando :

$$\begin{cases} \xi > \xi_C \Rightarrow \text{dipende dal tipo di acciaio} \\ x > x_C = \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_{yd}} \cdot d \end{cases}$$

Dalla linearità del diagramma delle deformazioni si ha:

$$\epsilon_{cu} : x = \epsilon_s : (d - x) \quad \xrightarrow{\text{deformazione del cls}} \quad \epsilon_s = \frac{d - x}{x} \cdot \epsilon_{cu}$$

Equilibrio alla traslazione $A_s \cdot E_s \cdot \epsilon_s - \beta_0 \cdot x \cdot b \cdot f_{cd} = 0$

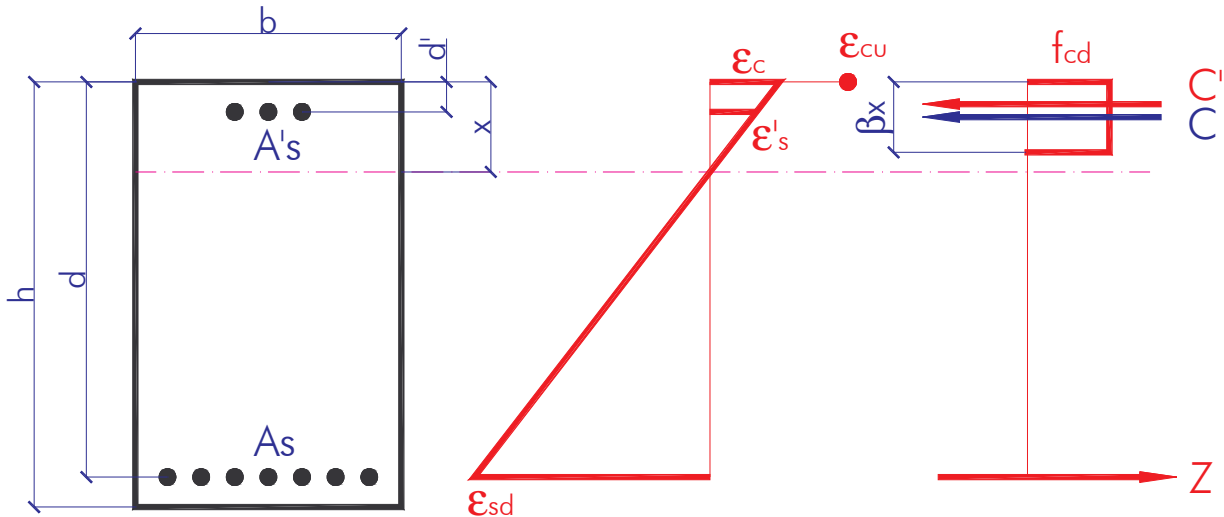
Determinazione del momento resistente: $M_{rd} = A_s \cdot E_s \cdot \epsilon_s \cdot (d - \kappa_0 \cdot x)$

Poiché queste sezioni hanno generalmente un tipo di rottura fragile è consigliabile non usarle, ove quindi non vi fosse la possibilità di aumentare le dimensioni della sezione in calcestruzzo è conveniente adottare una soluzione con doppia armatura.

SEZIONE RETTANGOLARE A DOPPIA ARMATURA

Sezione rettangolare doppiamente armata: Campo A

L'armatura compressa può snervarsi ma non può mai raggiungere il valore $\epsilon_{sd} = 0.01$ poiché il calcestruzzo raggiungerebbe prima la condizione di rottura $\epsilon_{cu} = 0.0035$.



Caso 1 (armatura tesa a rottura, armatura compressa in campo elastico)

$$\text{Stati deformativi: } \begin{cases} \epsilon_c \leq \epsilon_{cu} \\ \epsilon'_s < \epsilon_{yd} \\ \epsilon_s = \epsilon_{sd} \end{cases}$$

L'asse neutro si determina imponendo l'equilibrio alla traslazione:

$$A_s \cdot f_{sd} - A'_s \cdot E_s \cdot \epsilon'_s - \beta \cdot x \cdot b \cdot f_{cd} = 0$$

Dalla linearità del diagramma delle deformazioni si ottengono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} A_s \cdot f_{sd} - A'_s \cdot E_s \cdot \left(\frac{x-d'}{d-x} \right) \cdot \epsilon_{sd} - (1.6 - 0.8 \cdot \bar{\epsilon}_c) \cdot \bar{\epsilon}_c \cdot x \cdot b \cdot f_{cd} = 0 \\ \bar{\epsilon}_c = 2.86 \cdot \frac{x}{d-x} \end{cases}$$

Una volta determinata la posizione dell'asse neutro è necessario verificare l'ipotesi di deformazione dell'armatura compressa.

Armatura compressa:

$$\epsilon'_s = \frac{x-d'}{d-x} \cdot \epsilon_{sd} < \epsilon_{yd}$$

Se la deformazione nell'armatura compressa rispetta la condizione di campo elastico si procede alla determinazione del momento resistente.

Determinazione del momento resistente:

$$M_{rd} = A_s \cdot f_{sd} \cdot (d - \kappa \cdot x) + A'_s \cdot E_s \cdot \varepsilon'_s \cdot (\kappa \cdot x - d')$$

Caso 2 (armatura tesa a rottura, armatura compressa snervata)

$$\text{Stati deformativi: } \begin{cases} \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu} \\ \varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd} \\ \varepsilon_s = \varepsilon_{sd} \end{cases}$$

L'asse neutro si determina imponendo l'equilibrio alla traslazione:

$$A_s \cdot f_{sd} - A'_s \cdot f_{sd} - \beta \cdot x \cdot b \cdot f_{cd} = 0$$

Dalla linearità del diagramma delle deformazioni si ottengono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} A_s \cdot f_{sd} - A'_s \cdot f_{sd} - (1.6 - 0.8 \cdot \bar{\varepsilon}_c) \cdot \bar{\varepsilon}_c \cdot x \cdot b \cdot f_{cd} = 0 \\ \bar{\varepsilon}_c = 2.86 \cdot \frac{x}{d - x} \end{cases}$$

Una volta determinata la posizione dell'asse neutro è necessario verificare l'ipotesi di deformazione dell'armatura compressa.

$$\text{Armatura compressa: } \varepsilon'_s = \frac{x - d'}{d - x} \cdot \varepsilon_{sd} \geq \varepsilon_{yd}$$

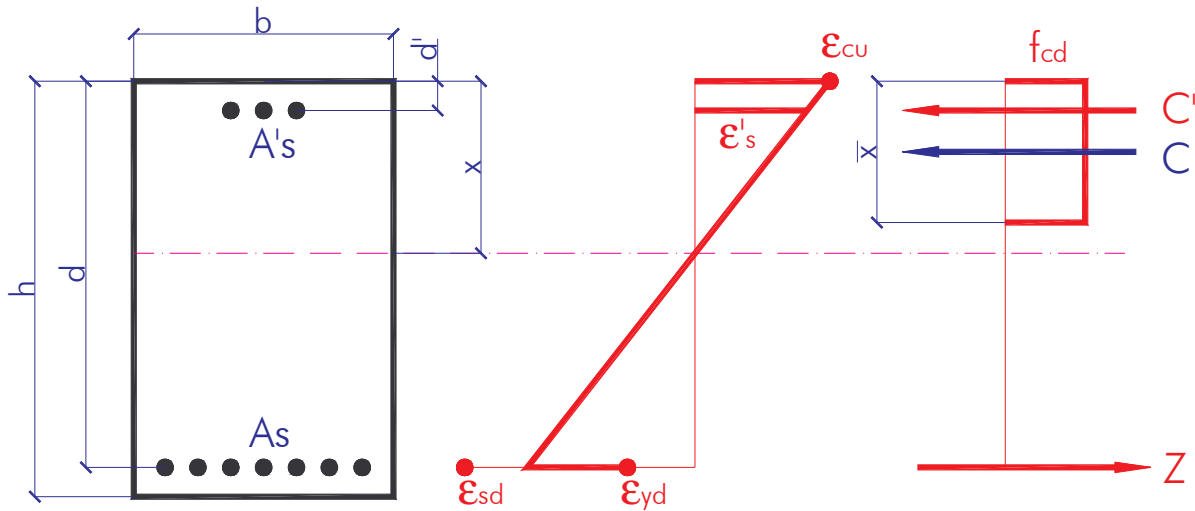
Se la deformazione nell'armatura compressa rispetta la condizione di snervamento si procede alla determinazione del momento resistente.

Determinazione del momento resistente:

$$M_{rd} = A_s \cdot f_{sd} \cdot (d - \kappa \cdot x) + A'_s \cdot f_{sd} \cdot (\kappa \cdot x - d')$$

Sezione rettangolare doppiamente armata: Campo B

L'armatura compressa può snervarsi ma non può mai raggiungere il valore $\epsilon_{sd} = 0.01$ poiché il calcestruzzo raggiunge prima la condizione di rottura $\epsilon_{cu} = 0.0035$.



Caso 1 (ambedue le armature snervate)

Stati deformativi:
$$\begin{cases} \epsilon_c = \epsilon_{cu} \\ \epsilon'_s \geq \epsilon_{yd} \\ \epsilon_{yd} < \epsilon_s < \epsilon_{sd} \end{cases}$$

Dall'equilibrio alla traslazione si ottiene la posizione dell'asse neutro:

$Z - C' - C = 0$

$$A_s \cdot f_{sd} - A'_s \cdot f_{sd} - \bar{x} \cdot b \cdot f_{cd} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = \frac{(A_s - A'_s) \cdot f_{sd}}{b \cdot f_{cd}} = (\omega_s - \omega'_s) \cdot d$$

Posizione dell'asse neutro:

$$x = \frac{\bar{x}}{\beta_0}$$

Una volta determinata la posizione dell'asse neutro è necessario verificare che le deformazioni nelle armature soddisfino le condizioni di snervamento.

Armatura compressa:

$$\epsilon'_s = \frac{x - d'}{x} \cdot \epsilon_{cu} \geq \epsilon_{yd}$$

Armatura tesa:

$$\epsilon_s = \frac{d - x}{x} \cdot \epsilon_{cu} \geq \epsilon_{yd}$$

Se ambedue le verifiche soddisfano le condizioni di Campo B caso 1, si può procedere alla determinazione del momento resistente della sezione:

Determinazione del momento resistente:

$$M_{rd} = A_s \cdot f_{sd} \cdot \left(d - \frac{\bar{x}}{2} \right) + A'_s \cdot f_{sd} \cdot \left(\frac{\bar{x}}{2} - d' \right)$$

Caso 2 (armatura tesa snervata, armatura compressa in campo elastico)

Stati deformativi:

$$\begin{cases} \varepsilon_c = \varepsilon_{cu} \\ \varepsilon'_s < \varepsilon_{yd} \\ \varepsilon_{yd} < \varepsilon_s < \varepsilon_{sd} \end{cases}$$

Se la deformazione dell'armatura tesa supera il limite di snervamento, mentre l'armatura compressa è ancora in fase elastica si procede nel seguente modo:

Equilibrio alla traslazione:

$$A_s \cdot f_{sd} - A'_s \cdot E_s \cdot \varepsilon'_s - \beta_0 \cdot x \cdot b \cdot f_{cd} = 0$$

$$A_s \cdot f_{sd} - A'_s \cdot E_s \cdot \left[\frac{x - d'}{x} \cdot \varepsilon_{cu} \right] - \beta_0 \cdot x \cdot b \cdot f_{cd} = 0$$

Risolviendo nell'incognita x si determina la posizione dell'asse neutro della sezione armata.

Si verifica condizione deformativa delle armature.

Armatura compressa:

$$\varepsilon'_s = \frac{x - d'}{x} \cdot \varepsilon_{cu} < \varepsilon_{yd}$$

Armatura tesa:

$$\varepsilon_s = \frac{d - x}{x} \cdot \varepsilon_{cu} \geq \varepsilon_{yd}$$

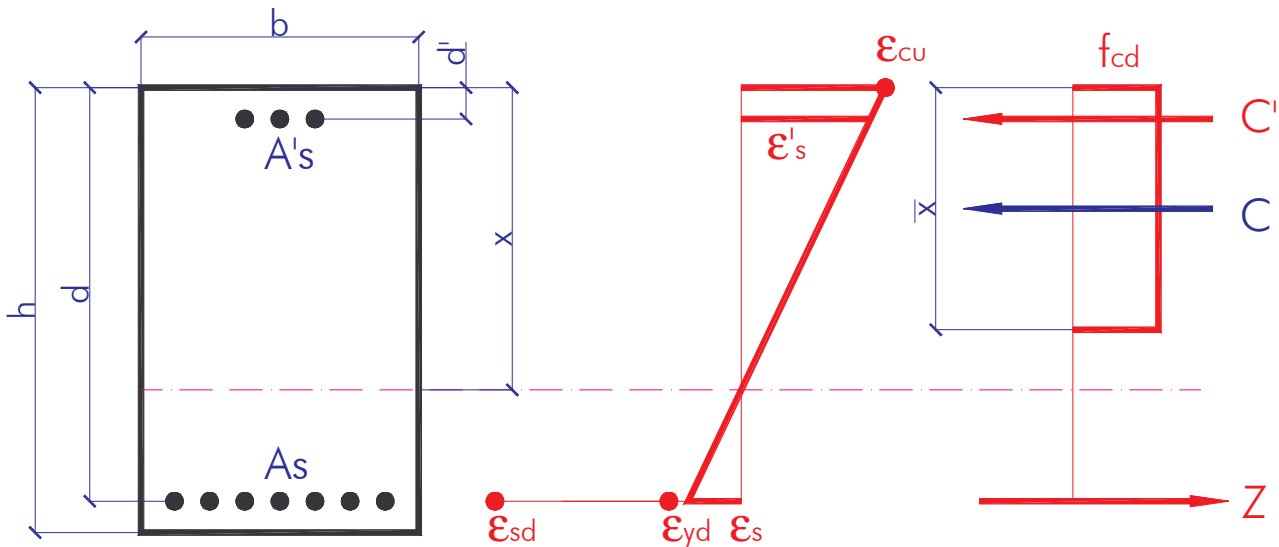
Se ambedue le verifiche soddisfano le condizioni di deformazione, si può procedere alla determinazione del momento resistente della sezione:

Momento resistente:

$$M_{rd} = A_s \cdot f_{sd} \cdot (d - \kappa_0 \cdot x) + A'_s \cdot E_s \cdot \varepsilon'_s \cdot (\kappa_0 \cdot x - d')$$

Sezione rettangolare doppiamente armata: Campo C

L'armatura compressa può snervarsi ma non può mai raggiungere il valore $\epsilon_{sd} = 0.01$ poiché il calcestruzzo raggiunge prima la condizione di rottura $\epsilon_{cu} = 0.0035$.



Caso 1 (ambedue le armature in campo elastico)

Stati deformativi:
$$\begin{cases} \epsilon_c = \epsilon_{cu} \\ \epsilon'_s < \epsilon_{yd} \\ \epsilon_s < \epsilon_{yd} \end{cases}$$

Se entrambe le deformazioni delle armature sono inferiori alla deformazione di snervamento propria del tipo di acciaio considerato, si procede nel seguente modo:

Equilibrio alla traslazione:

$$A_s \cdot E_s \cdot \epsilon_s - A'_s \cdot E_s \cdot \epsilon'_s - \beta_0 \cdot x \cdot b \cdot f_{cd} = 0$$

$$A_s \cdot E_s \cdot \left[\frac{d-x}{x} \cdot \epsilon_{cu} \right] - A'_s \cdot E_s \cdot \left[\frac{x-d'}{x} \cdot \epsilon_{cu} \right] - \beta_0 \cdot x \cdot b \cdot f_{cd} = 0$$

Risolvendo nell'incognita x si determina la posizione dell'asse neutro della sezione armata.

Si verifica condizione di elasticità delle armature (la condizione è imposta dal Campo C).

Armatura compressa:
$$\epsilon'_s = \frac{x-d'}{x} \cdot \epsilon_{cu} < \epsilon_{yd}$$

Armatura tesa:

$$\varepsilon_s = \frac{d-x}{x} \cdot \varepsilon_{cu} < \varepsilon_{yd}$$

Se ambedue le verifiche soddisfano le condizioni di elasticità, si può procedere alla determinazione del momento resistente della sezione:

Momento resistente:

$$M_{rd} = A_s \cdot E_s \cdot \varepsilon_s \cdot (d - \kappa_0 \cdot x) + A'_s \cdot E_s \cdot \varepsilon'_s \cdot (\kappa_0 \cdot x - d')$$

Caso 2 (armatura compressa snervata, armatura tesa in campo elastico)

Stati deformativi:

$$\begin{cases} \varepsilon_c = \varepsilon_{cu} \\ \varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd} \\ \varepsilon_s < \varepsilon_{yd} \end{cases}$$

Se l'armatura compressa supera il limite di snervamento, mentre l'armatura tesa resta in campo elastico si procede nel seguente modo:

Equilibrio alla traslazione:

$$A_s \cdot E_s \cdot \varepsilon_s - A'_s \cdot f_{sd} - \beta_0 \cdot x \cdot b \cdot f_{cd} = 0$$

$$A_s \cdot E_s \cdot \left[\frac{d-x}{x} \cdot \varepsilon_{cu} \right] - A'_s \cdot f_{sd} - \beta_0 \cdot x \cdot b \cdot f_{cd} = 0$$

Risolviendo nell'incognita x si determina la posizione dell'asse neutro della sezione armata.

Si verifica condizione deformativa delle armature.

Armatura compressa:

$$\varepsilon'_s = \frac{x-d'}{x} \cdot \varepsilon_{cu} \geq \varepsilon_{yd}$$

Armatura tesa:

$$\varepsilon_s = \frac{d-x}{x} \cdot \varepsilon_{cu} < \varepsilon_{yd}$$

Se ambedue le verifiche soddisfano le condizioni deformative, si può procedere alla determinazione del momento resistente della sezione:

Momento resistente:

$$M_{rd} = A_s \cdot E_s \cdot \varepsilon_s \cdot (d - \kappa_0 \cdot x) + A'_s \cdot f_{sd} \cdot (\kappa_0 \cdot x - d')$$

Specchietto finale relativo alle forze di trazione e compressione nella sezione

CAMPO	Z	C'	C
A	$A_s \cdot f_{sd}$	$A'_s \cdot E_s \cdot \varepsilon'_s$	$\beta \cdot x \cdot b \cdot f_{cd}$
	$A_s \cdot f_{sd}$	$A'_s \cdot f_{sd}$	$\beta \cdot x \cdot b \cdot f_{cd}$
B	$A_s \cdot f_{sd}$	$A'_s \cdot f_{sd}$	$\beta_0 \cdot x \cdot b \cdot f_{cd}$
	$A_s \cdot f_{sd}$	$A'_s \cdot E_s \cdot \varepsilon'_s$	$\beta_0 \cdot x \cdot b \cdot f_{cd}$
C	$A_s \cdot E_s \cdot \varepsilon_s$	$A'_s \cdot E_s \cdot \varepsilon'_s$	$\beta_0 \cdot x \cdot b \cdot f_{cd}$
	$A_s \cdot E_s \cdot \varepsilon_s$	$A'_s \cdot f_{sd}$	$\beta_0 \cdot x \cdot b \cdot f_{cd}$

Determinazione rapida dei campi di rottura

Rapporto meccanico d'armatura tesa:

$$\omega_s = \frac{A_s \cdot f_{sd}}{b \cdot d \cdot f_{cd}}$$

Campo A: $0 \leq \omega_s \leq \omega_A = 0.207$

Campo B: $\omega_A \leq \omega_s \leq \omega_C$

Campo C: $\omega_s \geq \omega_C = \begin{cases} 0.631 & Fe22k \\ 0.575 & Fe32k \\ 0.546 & Fe38k \\ 0.526 & Fe44k \end{cases}$

Posizione adimensionalizzata di x :

$$\xi = x/d$$

Campo A: $0 \leq \xi_s \leq \xi_A = 0.2593$

Campo B: $\xi_A \leq \xi_s \leq \xi_C$

Campo C: $\xi_s \geq \xi_C = \begin{cases} 0.7892 & Fe22k \\ 0.7187 & Fe32k \\ 0.6822 & Fe38k \\ 0.6518 & Fe44k \end{cases}$

Deformazioni :

$$\varepsilon_{yd} = \frac{f_{sd}}{E_s} : \quad \varepsilon_{yd} = \begin{cases} 0.000911 & Fe22k \\ 0.001325 & Fe32k \\ 0.001573 & Fe38k \\ 0.001822 & Fe44k \end{cases}$$

$$\varepsilon_{sd} = 0.01$$

$$\varepsilon_{cu} = 0.0035$$

PRESSO – TENSO FLESSIONE S.L.U.

Meccanismi di rottura della sezione

I meccanismi di rottura di una sezione rettangolare doppiamente armata soggetta a presso - tenso flessione dipendono dai seguenti parametri deformativi:

Deformazione limite del calcestruzzo: $\epsilon_{cu} = 0.0035$

Deformazione limite nelle armature: $\epsilon_{sd} = 0.01$

Deformazione per contrazione uniforme del calcestruzzo: $\epsilon_{c1} = 0.002$

La terza condizione si verifica per piccole eccentricità della forza normale.

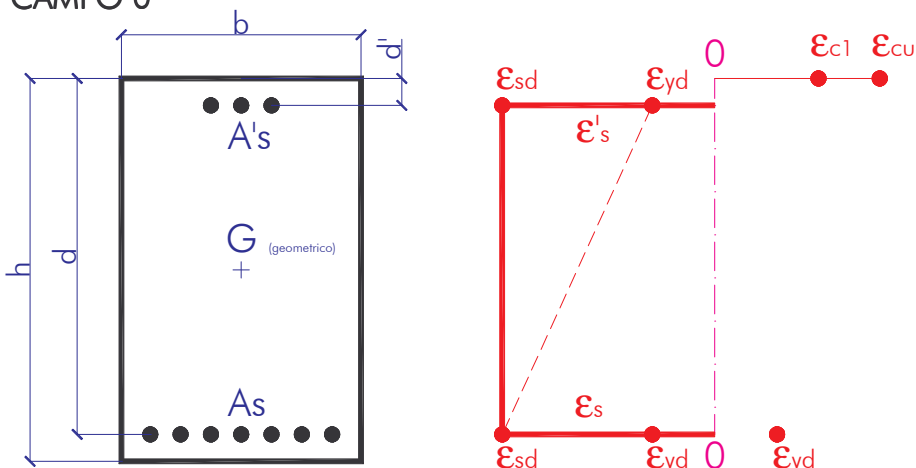
NOTA:

Nel calcolo delle sezioni soggette a presso – tenso flessione è usanza considerare la forza normale agente nel baricentro geometrico della sezione, per tale motivo l'equilibrio alla rotazione sarà sempre condotto utilizzando come polo il baricentro della sezione.

Si indicherà inoltre con N_{sd}^+ la forza normale di trazione e con N_{sd}^- la forza normale di compressione. Il verso di N_{sd}^+ è concorde con il verso delle armature tese, mentre il verso di N_{sd}^- è concorde con il verso del calcestruzzo compresso.

Utilizzando le espressioni che di seguito elencheremo, si possono costruire i “domini di rottura” di una sezione armata soggetta a presso – tenso flessione. Di solito si usano gli stati deformativi che limitano il campo perché individuano in base alle deformazioni ultime, assi neutri ben definiti, tuttavia per ogni campo si possono imporre delle deformazioni che siano coerenti con le ipotesi del campo considerato e determinare così l'asse neutro per tutte le situazioni che si vogliono studiare. Maggiore è il numero di situazioni studiate, più definito è il dominio di rottura.

CAMPO 0



La sezione è interamente fessurata, le armature sono tese e snervate e hanno raggiunto la deformazione convenzionale a rottura ϵ_{sd} .

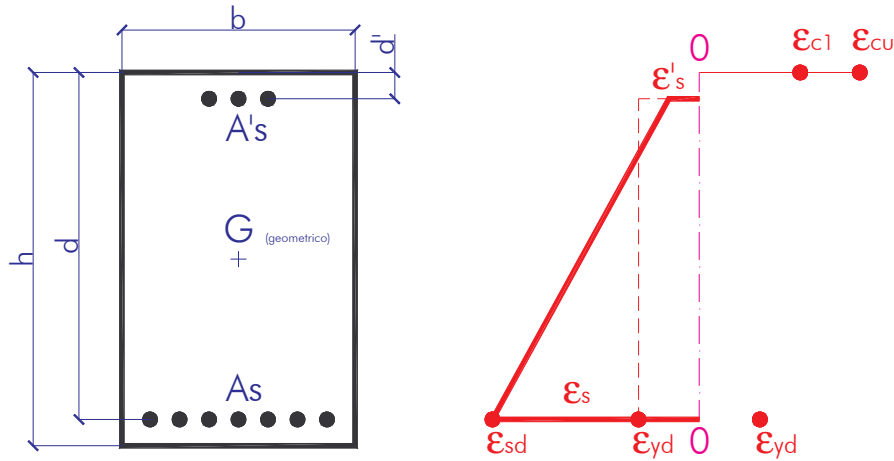
Equilibrio alla traslazione:

$$N_{rd}^+ = -(A_s \cdot f_{sd} + A'_s \cdot f_{sd})$$

Equilibrio alla rotazione:

$$M_{rd} = \left| A_s \cdot f_{sd} \cdot \left(d - \frac{h}{2} \right) - A'_s \cdot f_{sd} \cdot \left(\frac{h}{2} - d' \right) \right|$$

CAMPO 1



La sezione è interamente fessurata, l'armatura tesa inferiore è a rottura, mentre l'armatura tesa superiore è in fase elastica $\varepsilon'_s \leq \varepsilon_{yd}$.

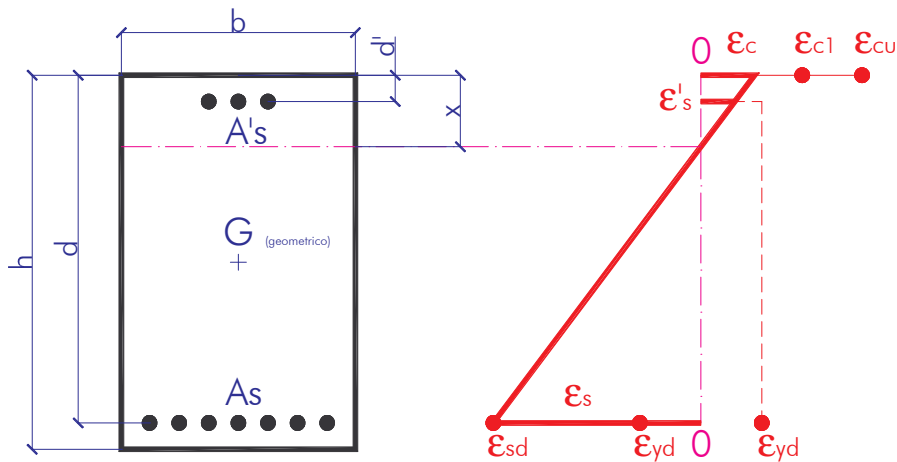
Equilibrio alla traslazione:

$$N_{rd}^+ = -(A_s \cdot f_{sd} + A'_s \cdot E_s \cdot \varepsilon'_s)$$

Equilibrio alla rotazione:

$$M_{rd} = \left| A_s \cdot f_{sd} \cdot \left(d - \frac{h}{2} \right) - A'_s \cdot E_s \cdot \varepsilon'_s \cdot \left(\frac{h}{2} - d' \right) \right|$$

CAMPO 2A



La sezione è parzializzata, l'armatura tesa inferiore è a rottura, l'armatura compressa superiore è in fase elastica $\varepsilon'_s \leq \varepsilon_{yd}$ e il calcestruzzo è in fase elastica $\varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu}$.

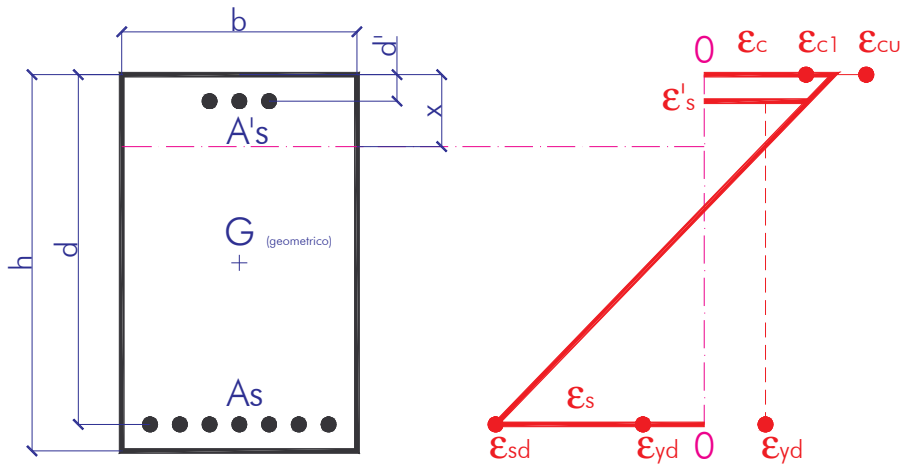
Equilibrio alla traslazione:

$$N_{rd}^- = \left| A_s \cdot f_{sd} - A'_s \cdot E_s \cdot \varepsilon'_s - \beta \cdot x \cdot b \cdot f_{cd} \right|$$

Equilibrio alla rotazione:

$$M_{rd} = \left| A_s \cdot f_{sd} \cdot \left(d - \frac{h}{2} \right) + A'_s \cdot E_s \cdot \varepsilon'_s \cdot \left(\frac{h}{2} - d' \right) + \beta \cdot x \cdot b \cdot f_{cd} \cdot \left(\frac{h}{2} - \kappa \cdot x \right) \right|$$

CAMPO 2B



La sezione è parzializzata, l'armatura tesa inferiore è a rottura, l'armatura compressa superiore snervata $\varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd}$ e il calcestruzzo è in fase elastica $\varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu}$.

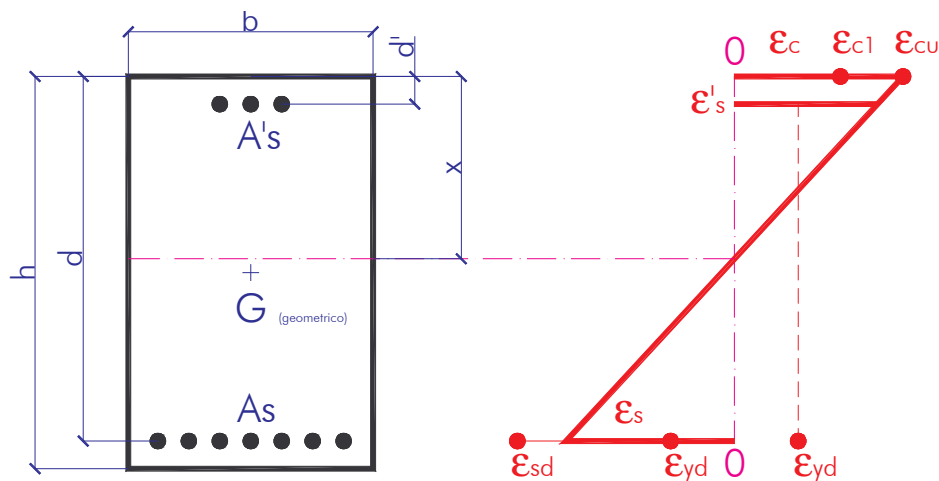
Equilibrio alla traslazione:

$$N_{rd}^- = |A_s \cdot f_{sd} - A'_s \cdot f_{sd} - \beta \cdot x \cdot b \cdot f_{cd}|$$

Equilibrio alla rotazione:

$$M_{rd} = \left| A_s \cdot f_{sd} \cdot \left(d - \frac{h}{2} \right) + A'_s \cdot f_{sd} \cdot \left(\frac{h}{2} - d' \right) + \beta \cdot x \cdot b \cdot f_{cd} \cdot \left(\frac{h}{2} - \kappa \cdot x \right) \right|$$

CAMPO 3



La sezione è parzializzata, l'armatura tesa inferiore è snervata $\varepsilon_s \geq \varepsilon_{yd}$, l'armatura compressa superiore è snervata $\varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd}$ e il calcestruzzo ha raggiunto la deformazione limite $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}$.

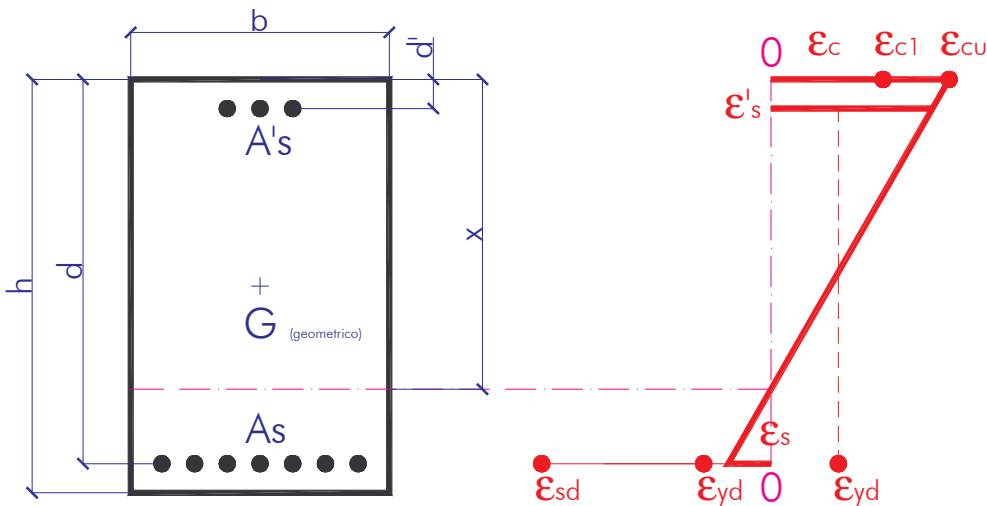
Equilibrio alla traslazione:

$$N_{rd}^- = |A_s \cdot f_{sd} - A'_s \cdot f_{sd} - \beta_0 \cdot x \cdot b \cdot f_{cd}|$$

Equilibrio alla rotazione:

$$M_{rd} = \left| A_s \cdot f_{sd} \cdot \left(d - \frac{h}{2} \right) + A'_s \cdot f_{sd} \cdot \left(\frac{h}{2} - d' \right) + \beta_0 \cdot x \cdot b \cdot f_{cd} \cdot \left(\frac{h}{2} - \kappa_0 \cdot x \right) \right|$$

CAMPO 4



La sezione è parzializzata, l'armatura tesa inferiore è in fase elastica $\varepsilon_s < \varepsilon_{yd}$, l'armatura compressa superiore è snervata $\varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd}$ e il calcestruzzo ha raggiunto la deformazione limite $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}$.

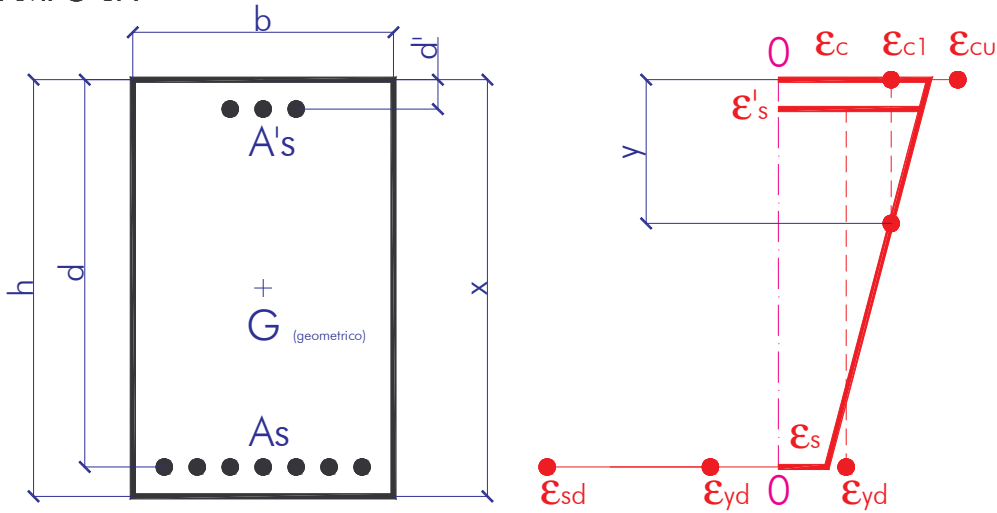
Equilibrio alla traslazione:

$$N_{rd}^- = |A_s \cdot E_s \cdot \varepsilon_s - A'_s \cdot f_{sd} - \beta_0 \cdot x \cdot b \cdot f_{cd}|$$

Equilibrio alla rotazione:

$$M_{rd} = \left| A_s \cdot E_s \cdot \varepsilon_s \cdot \left(d - \frac{h}{2} \right) + A'_s \cdot f_{sd} \cdot \left(\frac{h}{2} - d' \right) + \beta_0 \cdot x \cdot b \cdot f_{cd} \cdot \left(\frac{h}{2} - \kappa_0 \cdot x \right) \right|$$

CAMPO 5A



La sezione è interamente reagente, l'armatura tesa inferiore è in fase elastica $\epsilon_s < \epsilon_{yd}$, l'armatura compressa superiore è snervata $\epsilon'_s \geq \epsilon_{yd}$ e il calcestruzzo è a rottura.

Equilibrio alla traslazione:

$$N_{rd}^- = \left| -A_s \cdot E_s \cdot \epsilon_s - A'_s \cdot f_{sd} - \beta^* \cdot x \cdot b \cdot f_{cd} \right|$$

Equilibrio alla rotazione:

$$M_{rd} = \left| -A_s \cdot E_s \cdot \epsilon_s \cdot \left(d - \frac{h}{2} \right) + A'_s \cdot f_{sd} \cdot \left(\frac{h}{2} - d' \right) + \beta^* \cdot x \cdot b \cdot f_{cd} \cdot \left(\frac{h}{2} - \kappa^* \cdot x \right) \right|$$

Se la sezione è rettangolare :

$$\begin{cases} \beta^* \cdot x = 0.8 \cdot h \\ \kappa^* \cdot x = 0.4 \cdot h \end{cases}$$

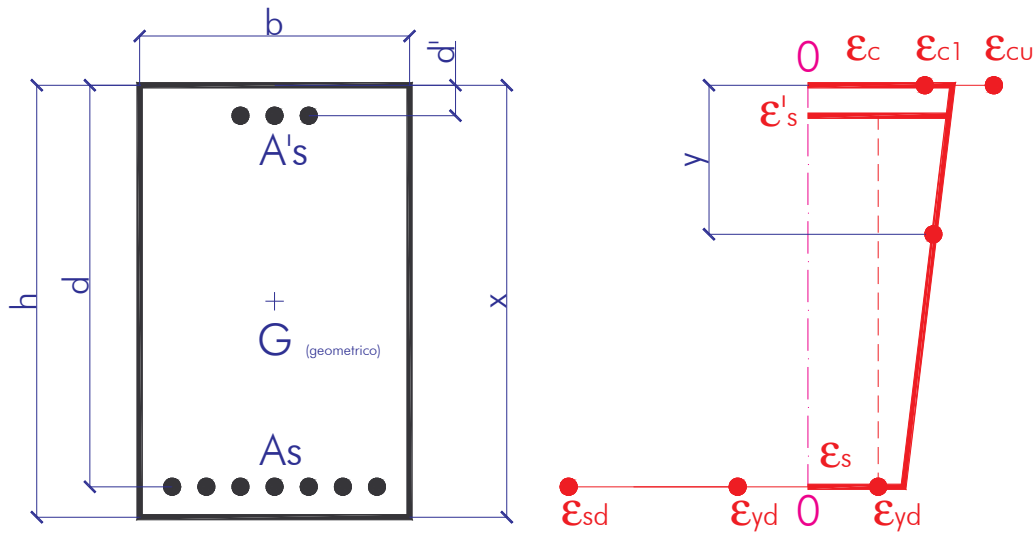
Per una sezione generica:

$$\begin{cases} \beta^* = 1 - \frac{(1-\eta)^3}{3 \cdot (\xi - \eta)^2} \\ \kappa^* = 0.5 \cdot \left[1 - \frac{(1-\eta)^3}{6 \cdot (\xi - \eta)^2} \cdot (3 + \eta) \right] \cdot \frac{1}{\beta^*} \end{cases}$$

Dove :

$$\begin{cases} \xi = \frac{x}{h} \\ \eta = \frac{y}{h} \\ y = \frac{\epsilon_{cu} - \epsilon_{c1}}{\epsilon_{cu}} \cdot h \end{cases}$$

CAMPO 5B



La sezione è interamente reagente, l'armatura tesa inferiore e l'armatura compressa superiore sono snervate $\epsilon_s \geq \epsilon_{yd}$ e $\epsilon'_s \geq \epsilon_{yd}$ il calcestruzzo è a rottura.

Equilibrio alla traslazione:

$$N_{rd}^- = \left| -A_s \cdot f_{sd} - A'_s \cdot f_{sd} - \beta^* \cdot x \cdot b \cdot f_{cd} \right|$$

Equilibrio alla rotazione:

$$M_{rd} = \left| -A_s \cdot f_{sd} \cdot \left(d - \frac{h}{2} \right) + A'_s \cdot f_{sd} \cdot \left(\frac{h}{2} - d' \right) + \beta^* \cdot x \cdot b \cdot f_{cd} \cdot \left(\frac{h}{2} - \kappa^* \cdot x \right) \right|$$

Se la sezione è rettangolare :

$$\begin{cases} \beta^* \cdot x = 0.8 \cdot h \\ \kappa^* \cdot x = 0.4 \cdot h \end{cases}$$

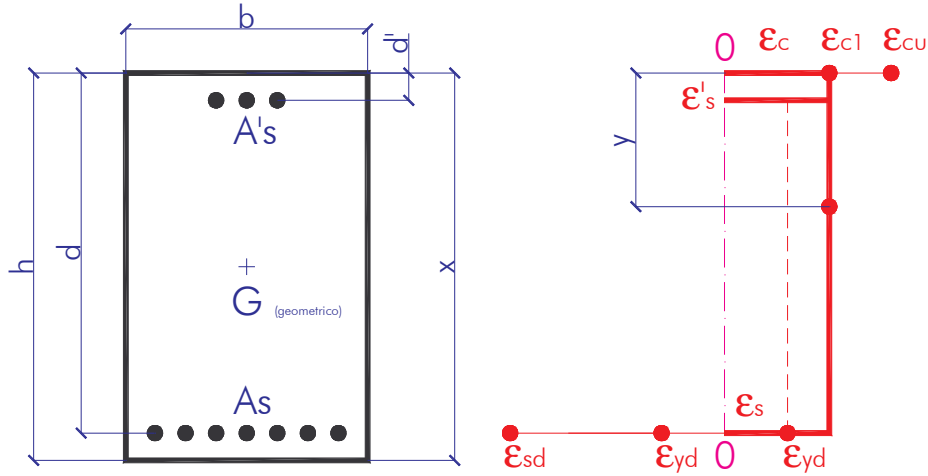
Per una sezione generica:

$$\begin{cases} \beta^* = 1 - \frac{(1-\eta)^3}{3 \cdot (\xi - \eta)^2} \\ \kappa^* = 0.5 \cdot \left[1 - \frac{(1-\eta)^3}{6 \cdot (\xi - \eta)^2} \cdot (3 + \eta) \right] \cdot \frac{1}{\beta^*} \end{cases}$$

Dove :

$$\begin{cases} \xi = \frac{x}{h} \\ \eta = \frac{y}{h} \\ y = \frac{\epsilon_{cu} - \epsilon_{c1}}{\epsilon_{cu}} \cdot h \end{cases}$$

CAMPO 5C (LIMITE)



La sezione è interamente reagente, l'armatura tesa inferiore e l'armatura compressa superiore sono snervate $\epsilon_s = \epsilon'_s = 0.02$ e il calcestruzzo è a rottura $\epsilon_c = \epsilon_{c1} = 0.02$.

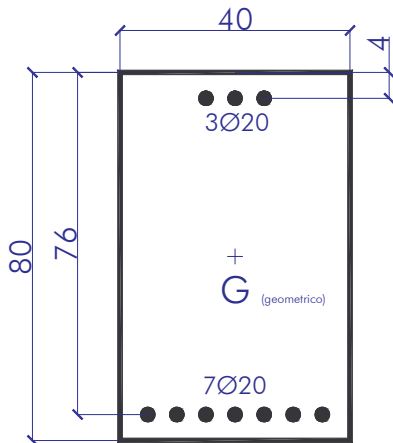
Equilibrio alla traslazione:

$$N_{rd}^- = \left| -A_s \cdot f_{sd} - A'_s \cdot f_{sd} - h \cdot b \cdot f_{cd} \right|$$

Equilibrio alla rotazione:

$$M_{rd} = \left| -A_s \cdot f_{sd} \cdot \left(d - \frac{h}{2} \right) + A'_s \cdot f_{sd} \cdot \left(\frac{h}{2} - d' \right) \right|$$

Esempio pratico di costruzione del dominio delle rotture e verifica della sezione



DATI

$h = 80$	[cm]
$b = 40$	[cm]
$d = 76$	[cm]
$d' = 4$	[cm]
$A_s = 21.99$	[cm ²]
$A'_s = 9.42$	[cm ²]

Calcestruzzo

$R_{ck} = 25/30$	[kN/cm ²]
$f_{cd} = 1.328$	[kN/cm ²]
$\epsilon_{cu} = 0.0035$	
$\epsilon_{c1} = 0.0020$	

Acciaio

Fe b 44k	
$f_{sd} = 37.39$	[kN/cm ²]
$\epsilon_{sd} = 0.01$	
$\epsilon_{yd} = 0.00187$	

CAMPO 0 ($\epsilon_s = \epsilon'_s = 0.01$; $\epsilon_c = 0$)

$$N_{rd}^+ = -(A_s \cdot f_{sd} + A'_s \cdot f_{sd})$$

$$N_{rd}^+ = (21.99 \cdot 37.39 + 9.42 \cdot 37.39) = -1174$$

$$M_{rd} = A_s \cdot f_{sd} \cdot \left(d - \frac{h}{2}\right) - A'_s \cdot f_{sd} \cdot \left(\frac{h}{2} - d'\right)$$

$$M_{rd} = 21.99 \cdot 37.39 \cdot (76 - 40) - 9.42 \cdot 37.39 \cdot (40 - 4) = 169$$

CAMPO 1 ($\epsilon_s = 0.01$; $\epsilon'_s < \epsilon_{yd}$; $\epsilon_c = 0$)

Dalla linearità del diagramma delle deformazioni in condizione limite si ha:

$$\epsilon_s : d = \epsilon'_s : d' \quad \Rightarrow \quad \epsilon'_s = \epsilon_s \cdot \frac{d'}{d} = 0.01 \cdot \frac{4}{76} = 0.0005263 < \epsilon_{yd}$$

$$N_{rd}^+ = -(A_s \cdot f_{sd} + A'_s \cdot E_s \cdot \epsilon'_s)$$

$$N_{rd}^+ = (21.99 \cdot 37.39 + 9.42 \cdot 21000 \cdot 0.0005263) = -926$$

$$M_{rd} = A_s \cdot f_{sd} \cdot \left(d - \frac{h}{2}\right) - A'_s \cdot E_s \cdot \epsilon'_s \cdot \left(\frac{h}{2} - d'\right)$$

$$M_{rd} = 21.99 \cdot 37.39 \cdot (76 - 40) - 9.42 \cdot 21000 \cdot 0.0005263 \cdot (40 - 4) = 259$$

CAMPO 3 ($\varepsilon_s = \varepsilon_{sd}$; $\varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd}$; $\varepsilon_{cu} = 0.0035$)

Dalla linearità del diagramma delle deformazioni in condizione limite si ha:

$$\varepsilon_{cu} : x = \varepsilon_{sd} : (d - x) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{sd}} \cdot d = \frac{0.0035}{0.0035 + 0.01} \cdot 76 = 19.70 \quad [cm]$$

$$\varepsilon_{cu} : x = \varepsilon'_s : (x - d') \quad \Rightarrow \quad \varepsilon'_s = \varepsilon_{cu} \cdot \frac{x - d'}{x} = 0.0035 \cdot \frac{19.7 - 4}{19.7} = 0.00279 > \varepsilon_{yd}$$

$$N_{rd}^- = |A_s \cdot f_{sd} - A'_s \cdot f_{sd} - \beta_0 \cdot x \cdot b \cdot f_{cd}|$$

$$N_{rd}^- = |21.99 \cdot 37.39 - 9.42 \cdot 37.39 - 0.8 \cdot 19.7 \cdot 40 \cdot 1.328| = 367$$

$$M_{rd} = \left| A_s \cdot f_{sd} \cdot \left(d - \frac{h}{2} \right) + A'_s \cdot f_{sd} \cdot \left(\frac{h}{2} - d' \right) + \beta_0 \cdot x \cdot b \cdot f_{cd} \cdot \left(\frac{h}{2} - \kappa_0 \cdot x \right) \right|$$

$$M_{rd} = |21.99 \cdot 37.39 \cdot (76 - 40) + 9.42 \cdot 37.39 \cdot (40 - 4) + 0.8 \cdot 19.7 \cdot 40 \cdot 1.328 \cdot (40 - 0.4 \cdot 19.7)| = 691$$

CAMPO 4 ($\varepsilon_s = \varepsilon_{yd}$; $\varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd}$; $\varepsilon_{cu} = 0.0035$)

Dalla linearità del diagramma delle deformazioni in condizione limite si ha:

$$\varepsilon_{cu} : x = \varepsilon_{yd} : (d - x) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{yd}} \cdot d = \frac{0.0035}{0.0035 + 0.00187} \cdot 76 = 49.53 \quad [cm]$$

$$\varepsilon_{cu} : x = \varepsilon'_s : (x - d') \quad \Rightarrow \quad \varepsilon'_s = \varepsilon_{cu} \cdot \frac{x - d'}{x} = 0.0035 \cdot \frac{49.53 - 4}{49.53} = 0.00322 > \varepsilon_{yd}$$

$$N_{rd}^- = |A_s \cdot f_{sd} - A'_s \cdot f_{sd} - \beta_0 \cdot x \cdot b \cdot f_{cd}|$$

$$N_{rd}^- = |21.99 \cdot 37.39 - 9.42 \cdot 37.39 - 0.8 \cdot 49.53 \cdot 40 \cdot 1.328| = 1635$$

$$M_{rd} = \left| A_s \cdot f_{sd} \cdot \left(d - \frac{h}{2} \right) + A'_s \cdot f_{sd} \cdot \left(\frac{h}{2} - d' \right) + \beta_0 \cdot x \cdot b \cdot f_{cd} \cdot \left(\frac{h}{2} - \kappa_0 \cdot x \right) \right|$$

$$M_{rd} = |21.99 \cdot 37.39 \cdot (76 - 40) + 9.42 \cdot 37.39 \cdot (40 - 4) + 0.8 \cdot 49.53 \cdot 40 \cdot 1.328 \cdot (40 - 0.4 \cdot 49.53)| = 847$$

CAMPO 5 ($\varepsilon_s \leq \varepsilon_{yd}$; $\varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd}$; $\varepsilon_{cu} = 0.0035$)

Dalla linearità del diagramma delle deformazioni in condizione limite si ha:

$$\varepsilon_{cu} : h = \varepsilon'_s : (h - d') \quad \Rightarrow \quad \varepsilon'_s = \varepsilon_{cu} \cdot \frac{h - d'}{h} = 0.0035 \cdot \frac{80 - 4}{80} = 0.00332 > \varepsilon_{yd}$$

$$\varepsilon_{cu} : h = \varepsilon'_s : (h - d) \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_s = \varepsilon_{cu} \cdot \frac{h - d}{h} = 0.0035 \cdot \frac{80 - 76}{80} = 0.000175 < \varepsilon_{yd}$$

L'asse neutro coincide con l'altezza della sezione: $x = h$

$$N_{rd}^- = | -A_s \cdot E_s \cdot \varepsilon_s - A'_s \cdot f_{sd} - \beta_0 \cdot h \cdot b \cdot f_{cd} |$$

$$N_{rd}^- = | -21.99 \cdot 21000 \cdot 0.000175 - 9.42 \cdot 37.39 - 0.8 \cdot 80 \cdot 40 \cdot 1.328 | = 3833$$

$$M_{rd} = \left| -A_s \cdot E_s \cdot \varepsilon_s \cdot \left(d - \frac{h}{2} \right) + A'_s \cdot f_{sd} \cdot \left(\frac{h}{2} - d' \right) + \beta_0 \cdot h \cdot b \cdot f_{cd} \cdot \left(\frac{h}{2} - \kappa_0 \cdot h \right) \right|$$

$$M_{rd} = | -21.99 \cdot 21000 \cdot 0.000175 \cdot (76 - 40) + 9.42 \cdot 37.39 \cdot (40 - 4) + 0.8 \cdot 80 \cdot 40 \cdot 1.328 \cdot (40 - 0.4 \cdot 80) | = 370$$

CAMPO 5C ($\varepsilon_s = 0.02 > \varepsilon_{yd}$; $\varepsilon'_s = 0.02 > \varepsilon_{yd}$; $\varepsilon_{cu} = 0.02$)

L'asse neutro coincide con l'altezza della sezione: $x = h$

$$N_{rd}^- = | -A_s \cdot f_{sd} - A'_s \cdot f_{sd} - h \cdot b \cdot f_{cd} |$$

$$N_{rd}^- = | -21.99 \cdot 37.39 - 9.42 \cdot 37.39 - 80 \cdot 40 \cdot 1.328 | = 5424$$

$$M_{rd} = \left| -A_s \cdot f_{sd} \cdot \left(d - \frac{h}{2} \right) + A'_s \cdot f_{sd} \cdot \left(\frac{h}{2} - d' \right) \right|$$

$$M_{rd} = | -21.99 \cdot 37.39 \cdot (76 - 40) + 9.42 \cdot 37.39 \cdot (40 - 4) | = -169$$

VERIFICA

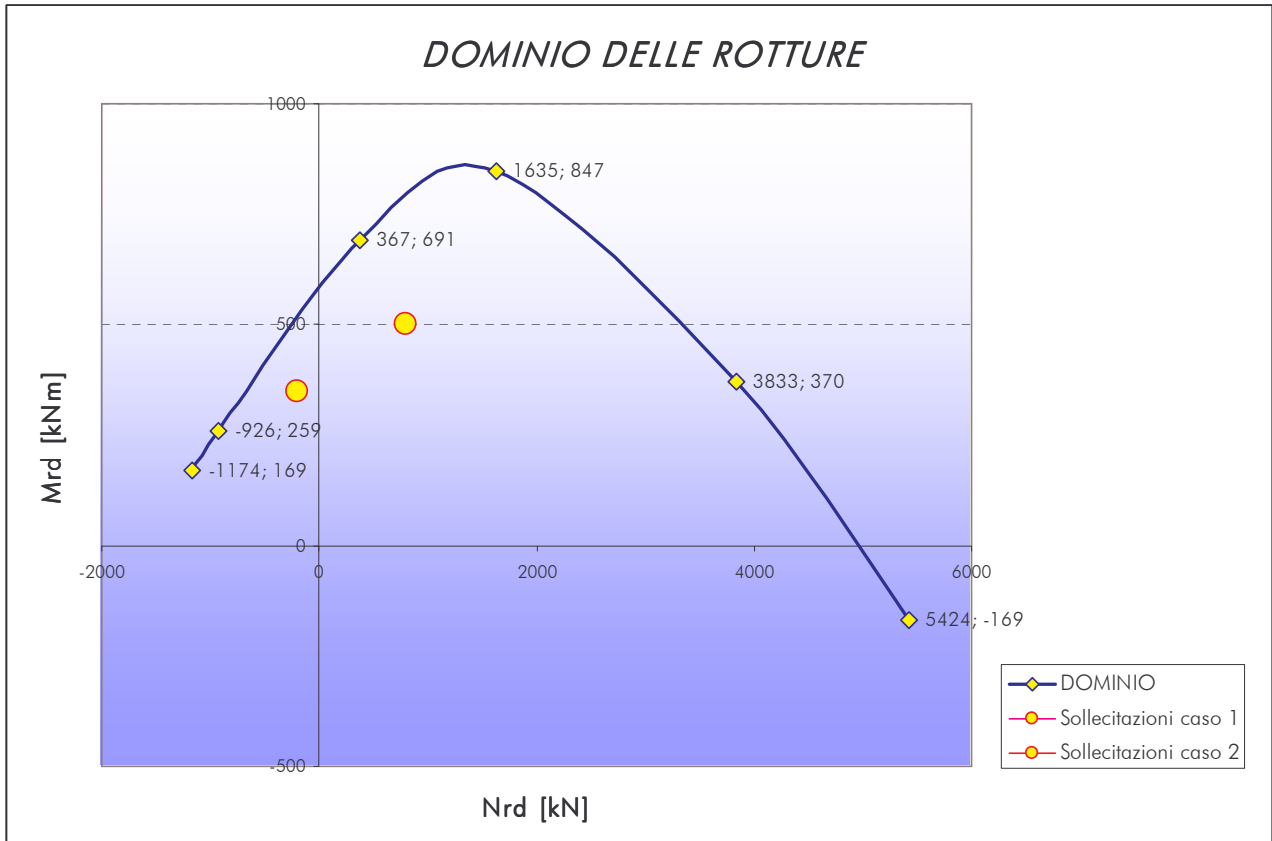
Una volta costruito il dominio delle rotture è possibile verificare qualsiasi coppia di valori di forza normale (trazione o compressione) e momento flettente.

Se la coppia di valori sta al disotto o sulla frontiera del dominio delle rotture significa che la sezione è verificata altrimenti la verifica non è soddisfatta.

Esempio:

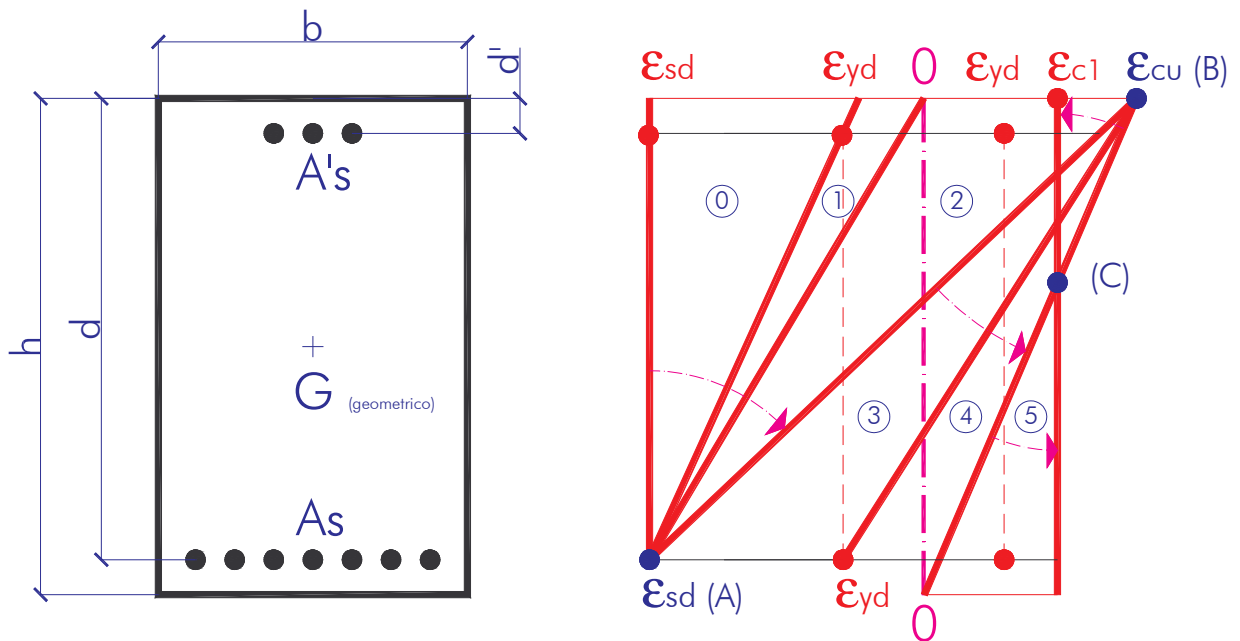
Condizione di sollecitazione 1: $N_{sd}^+ = -200 \text{ [kN]}$ $M_{sd} = 350 \text{ [kN} \cdot \text{m]}$

Condizione di sollecitazione 2: $N_{sd}^- = 800 \text{ [kN]}$ $M_{sd} = 500 \text{ [kN} \cdot \text{m]}$



Le condizioni di sollecitazione soddisfano il dominio delle rotture della sezione considerata.

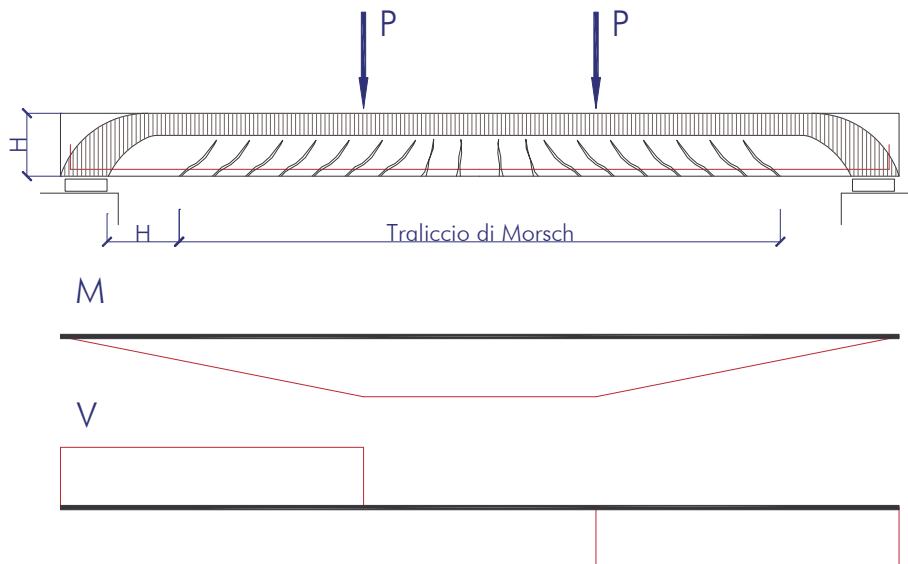
Condizioni limite di rottura della sezione



PROBLEMA DEL TAGLIO

Prove sperimentali su travi in scala reale hanno evidenziato come una trave in calcestruzzo armato abbia diversi meccanismi resistenti a taglio, non il solo il tradizionale traliccio di Morsch.

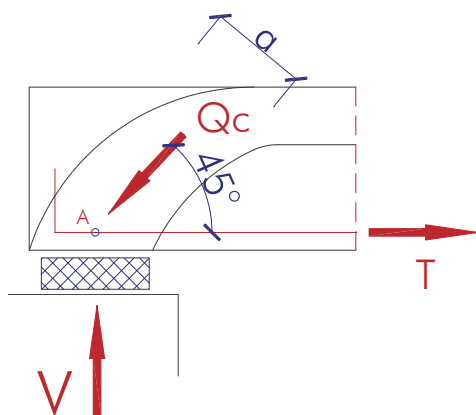
Prova sperimentale



Meccanismo Arco – Tirante

Il sistema resistente in prossimità degli appoggi si genera per la formazione di una biella compressa (arco) resa isostatica dalla presenza delle armature longitudinali inferiori (tirante). Le evidenze sperimentali hanno dimostrato che l'inclinazione dell'arco è di circa 45° .

Si imponga ora l'equilibrio nel punto A, considerando Q_c come la risultante delle tensioni di compressione:



$$\text{Trasl. Orizz.} \quad T - \frac{Q_c}{\sqrt{2}} = 0 \quad T = \frac{Q_c}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Trasl. Vertic.} \quad V - \frac{Q_c}{\sqrt{2}} = 0 \quad V = \frac{Q_c}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Da cui:} \quad \boxed{T = V}$$

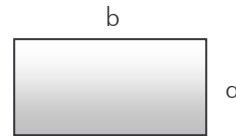
L'eguaglianza appena determinata trova riscontro nella Normativa ove si asserisce che l'armatura rettilinea debitamente ancorata, in prossimità degli appoggi, deve essere in grado di assorbire uno sforzo di trazione pari al taglio presente in quella sezione.

Poiché il primo meccanismo di crisi del sistema appena studiato è la presenza di un'armatura longitudinale inadeguata a sopportare il taglio, possiamo asserire che agli Stati Limite il **collasso dell'armatura inferiore** in prossimità degli appoggi, è pari a:

$$V_{Rd1} = f_{sd} \cdot A_s^{\text{longitudinale}}$$

Se tuttavia l'armatura longitudinale è in quantitativo superiore allo stretto necessario, può andare in **crisi la biella compressa**:

$$V_{Rd2} = \frac{Q_c}{\sqrt{2}} = \frac{f_{cd} \cdot a \cdot b}{\sqrt{2}}$$



$$b = b_w$$

Larghezza trasversale dell'anima

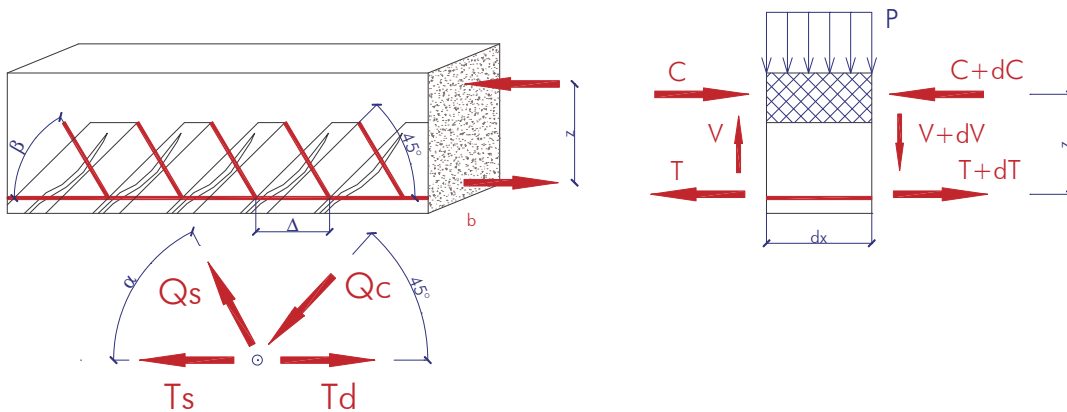
$$a \cong 0.4 \cdot h \div 0.6 \cdot h$$

Larghezza della biella compressa

Per cui la verifica sugli appoggi risulta:

$$V_{Rd} = \min(V_{Rd1}; V_{Rd2})$$

Meccanismo del Traliccio di Morsch – trave armata a taglio



Prima di entrare nel merito della teoria di Morsch, vediamo in che misura il taglio V incrementa la trazione nei ferri longitudinali, imponendo l'equilibrio del conico di trave:

Traslazione orizzontale: $(T + dT) - T + C - (C + dC) = 0 \Rightarrow \boxed{dT = dC}$

Ovvero trazioni e compressioni crescono in ugual misura.

Traslazione verticale: $p(x) \cdot dx + (V + dV) - V = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dV}{dx} = -p(x)}$

Rotazione: $(C + dC) \cdot z - C \cdot z - V \cdot \frac{dx}{2} - (V + dx) \cdot \frac{dx}{2} = 0$
 $dC \cdot z - V \cdot dx = 0 \Rightarrow \boxed{dC = \frac{V}{z} \cdot dx}$

Dalla prima si ottiene: $\Delta T = \Delta C$

Dalla terza si ottiene: $\Delta C = \Delta T = \frac{V}{z} \cdot \Delta x$ incremento di trazione per V .

Che unite forniscono: $F_s = T_d - T_s = \frac{V}{z} \cdot \Delta$ forza di scorrimento del concio.

Lo stesso risultato si ottiene dalla teoria di Jourawsky:

Tensioni tangenziali: $\tau_{zy} = \frac{V \cdot S}{J \cdot b_w} = \frac{V}{z \cdot b_w}$

Forza di scorrimento: $F_s = \tau_{yz} \cdot b_w \cdot \Delta = \frac{V}{z} \cdot \Delta = T_d - T_s$ [1]

Alla luce di questo risultato si imponga l'equilibrio del nodo i -esimo del traliccio di Morsch (trave armata a taglio) con ferri a taglio inclinati di un angolo α :

Traslazione verticale: $\frac{Q_c}{\sqrt{2}} - Q_s \cdot \sin \alpha = 0 \Rightarrow Q_c = Q_s \sin \alpha \cdot \sqrt{2}$ [2]

Traslazione orizzontale: $T_d - T_s - \frac{Q_c}{\sqrt{2}} - Q_s \cdot \cos \alpha = 0$ [3]

Sostituendo nella [3] la [1] e la [2] si ottiene: $\frac{V}{z} \cdot \Delta - \frac{Q_s \sin \alpha \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}} - Q_s \cos \alpha = 0$

$$\begin{aligned} V &= \frac{z}{\Delta} \cdot Q_s \cdot (\sin \alpha + \cos \alpha) \\ V &= \frac{z}{\Delta} \cdot \frac{Q_c}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha} \right) \end{aligned}$$

Applichiamo questi risultati alle prescrizioni degli Stati Limite:

Collasso delle armature a taglio V_{Rd3} :

$$V_{Rd3} = V_{wd} = \frac{z}{\Delta} \cdot f_{sd} \cdot A_{staffe} \cdot (\sin \alpha + \cos \alpha) \quad \begin{cases} \alpha = 90^\circ \div 45^\circ \\ z = 0.9 \cdot d \\ \Delta \cong d \end{cases}$$

La Normativa precedente asseriva che il taglio resistente V_{Rd3} da confrontare con il valore del taglio sollecitante V_{Sd} era la somma di due contributi: V_{wd} e V_{cd} .

Resistenza del c.l.s. tesso: $V_{cd} = 0.6 \cdot f_{ctd} \cdot b_w \cdot d \cdot \delta$

$\delta = 0$ efficacia nulla del calcestruzzo teso per travi tensoinflesse o con carichi che variano il segno del taglio.

La Nuova Normativa e l'edizione dell'Eurocodice 2 del 2001 cautelativamente sostengono che si può tenere conto unicamente della prestazione dei ferri a taglio senza considerare l'incremento di resistenza dovuto al calcestruzzo teso, per cui la verifica risulta:

$$V_{Rd3} = V_{wd} \geq V_{Sd}$$

Collasso della biella compressa V_{Rd2} :

$$V_{Rd2} = \frac{z}{\Delta} \cdot \frac{f_{cd2} \cdot b_w \cdot a}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha} \right)$$

$$\begin{cases} \alpha = 90^\circ \div 45^\circ \\ z = 0.9 \cdot d \\ \Delta \cong d \\ a = \Delta \cdot \sin 45^\circ \\ f_{cd2} = \nu \cdot f_{cd} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_{Rd2} \geq V_{sd} & \text{La sezione in calcestruzzo è idonea} \\ V_{Rd2} < V_{sd} & \text{Si deve aumentare la sezione in calcestruzzo} \end{cases}$$

Δ rappresenta il passo delle staffe o dei ferri inclinati; nelle Normative solitamente è indicato con s ; con b_w si indica la larghezza dell'anima della trave e con f_{cd2} si indica la resistenza ridotta a compressione che tiene in conto del campo fessurato.

Tenendo conto di quanto detto prima si perviene alla formulazione Normativa di V_{Rd2} :

$$V_{Rd2} = \frac{0.9 \cdot d}{d} \cdot \frac{\nu \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \cdot \left(\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha} \right) = \frac{1}{2} \cdot \nu \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot 0.9 \cdot d \cdot \left(1 + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right)$$

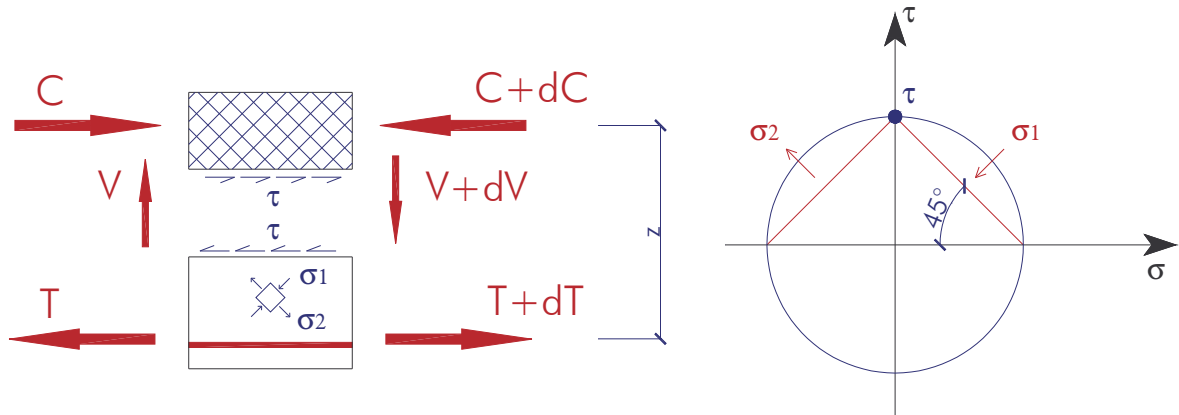
Dove:

$$\nu = \frac{1}{1.5} \quad \text{Decreto Ministeriale del 1996}$$

$$\nu = 0.7 - \frac{f_{ck}}{200} \geq 0.5 \quad \text{Eurocodice 2 del 1992 e O.M. 3274/03}$$

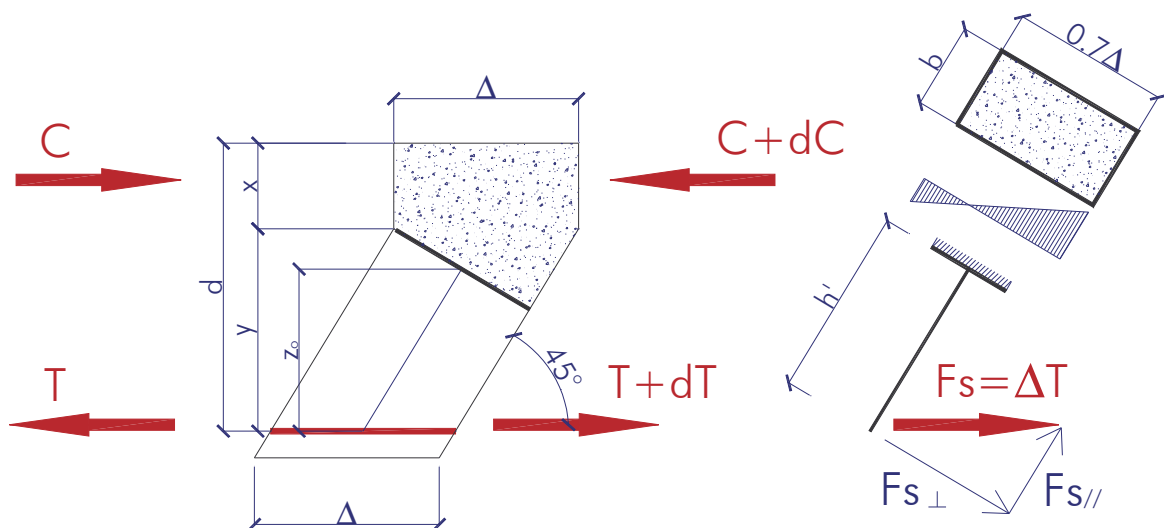
Collasso della trave non armata a taglio V_{Rd1} :

Le prove sperimentali hanno evidenziato che una trave non armata a taglio può di fatto esistere in quanto si instaura in esse un meccanismo che il traliccio di Morsch non riusciva ad interpretare e che viene definito *meccanismo a pettine*.



In realtà il fatto che il calcestruzzo resistesse in parte a trazione era già stato messo in evidenza precedentemente, ma non adeguatamente studiato. Se infatti immaginiamo di tagliare il concio di trave (non armato a taglio) precedentemente analizzato, all'altezza dell'asse neutro ci accorgiamo che al fine di equilibrare le risultanti di compressione e di trazione agenti sul lembo compresso di calcestruzzo e sulle armature tese, le due facce di concio (non armato a taglio) si devono scambiare delle mutue azioni tangenziali. Ma se sull'asse neutro le tensioni tangenziali sono diverse da zero, significa che in direzione ruotata di 45° queste tensioni tangenziali sono direzioni principali di trazione, come evidenziato dal cerchio di Mohr.

Vediamo come si comporta il meccanismo a pettine:



Il comportamento è quello di una mensola incastrata alla zona compressa soggetta alle seguenti sollecitazioni:

Compressione:
$$N = -F_{s//} = -\frac{F_s}{\sqrt{2}}$$

Taglio:
$$T = F_{s\perp} = \frac{F_s}{\sqrt{2}}$$

Momento flettente:
$$M = F_{s\perp} \cdot h' = F_s \cdot z_0 = F_s \cdot (y - \Delta/4)$$

Nella sezione d'incastro del dente si realizza uno stato di presso flessione:

Modulo di resistenza del dente:
$$W = \frac{b_w \cdot (\Delta/\sqrt{2})^3}{12} \cdot \frac{2}{(\Delta/\sqrt{2})} = \frac{b_w \cdot (\Delta/\sqrt{2})^2}{6}$$

Area della sezione del dente:
$$A = b_w \cdot \frac{\Delta}{\sqrt{2}}$$

La condizione di collasso del dente pressoinflesso si ha per superamento della tensione di trazione per flessione f_{ctf} a rottura:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W} = \frac{4 \cdot F_s}{b_w \cdot \Delta} \cdot \left(3 \cdot \frac{y}{\Delta} - 1 \right) = f_{ctf} = 1.6 \cdot f_{ctd}$$

Ora ricordandosi che dalla formulazione del traliccio di Morsch la forza di scorrimento era definita come: $F_s = V \cdot \Delta/z$ si può ottenere il taglio resistente:

$$V_{Rd_0} = \frac{F_s \cdot z}{\Delta} = \frac{1.6 \cdot f_{ctd} \cdot b_w \cdot z}{4 \cdot \left(3 \cdot \frac{y}{\Delta} - 1 \right)} = 0.25 \cdot b_w \cdot d \cdot f_{ctd}$$

dove :

$$\begin{cases} \Delta \cong d \\ z \cong 0.9 \cdot d \\ y \cong 0.8 \cdot d \end{cases}$$

Oltre al meccanismo a pettine si individuano molti altri fenomeni che incrementano la resistenza a taglio come ad esempio l'ingranamento degli inerti e l'effetto spinotto. Le normative li riassumono tutti in un'unica espressione del valore V_{Rd_1}

$$V_{Rd_1} = V_{Rd_0} \cdot r \cdot (1 + 50 \cdot \rho_s) \cdot \delta = 0.25 \cdot b_w \cdot d \cdot f_{ctd} \cdot r \cdot (1 + 50 \cdot \rho_s) \cdot \delta$$

b_w	Larghezza della membratura resistente a taglio
d	Altezza utile della sezione
$f_{ctd} = \frac{0.7 \cdot 0.27 \cdot \sqrt[3]{R_{ck}^2}}{1.6}$	Resistenza di calcolo a trazione espressa in $[N/mm^2]$
$r = (1.6 - d) \geq 1$	d = altezza utile della sezione, espressa in metri $d \leq 0.6 [m]$
$\rho_s = \frac{A_s}{b_w \cdot d} \leq 0.02$	Rapporto geometrico dell'armatura tesa che si estende per non meno di $d + l_{b,net}$ oltre la sezione considerata
$\delta = 1$	In presenza di flessione e in assenza di sforzi normali
$\delta = 0$	In presenza di un apprezzabile sforzo di trazione e in tensoflessione
$\delta = 1 + \frac{M_0}{M_{sd \max}}$	In presenza di sforzi di compressione o precompressione
$(1 < \delta \leq 2)$	$M_0 = \frac{N_{sd} \cdot J_i}{y'_c \cdot A_i}$ momento di decompressione

N.B.

Il valore nullo di δ deve essere ancora assunto nei casi in cui un'azione alternata dei carichi provochi l'inversione su livelli significativi del segno del taglio con possibilità di fessurazioni incrociate del calcestruzzo d'anima.

Verifica:

$V_{Rd1} \geq V_{sd}$	Armatura a taglio minima da normativa
$V_{Rd1} < V_{sd}$	E' necessario predisporre armatura a taglio

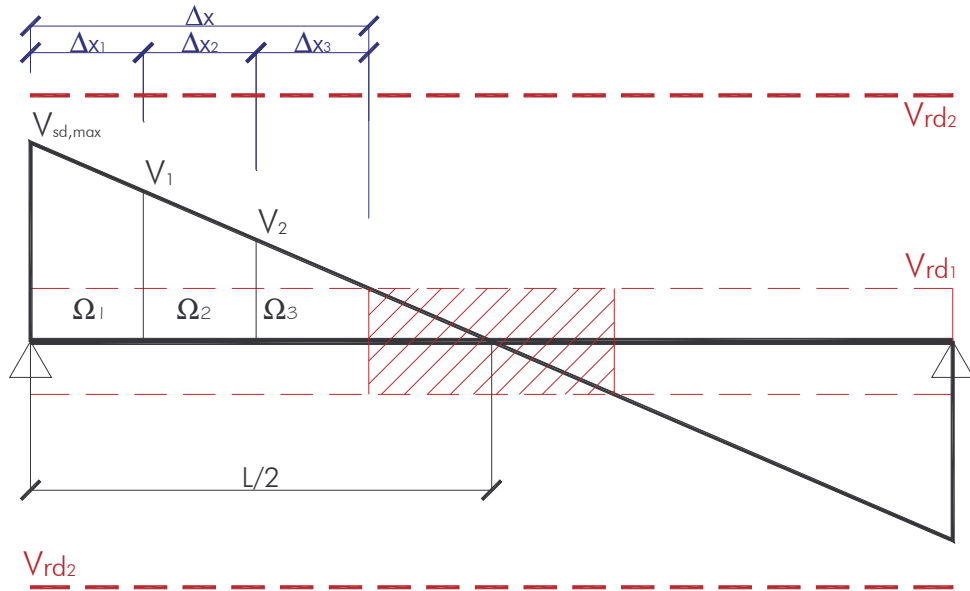
Riassumiamo i meccanismi resistenti:

- 1) V_{Rd1} resistenza di calcolo della trave priva di armatura a taglio.
- 2) V_{Rd2} resistenza ultima delle bielle compresse di calcestruzzo.
- 3) V_{Rd3} resistenza ultima dell'armatura specifica a taglio.

Staffare a taglio con il metodo delle aree di taglio

Di seguito si illustra il metodo per distribuire l'armatura a taglio in modo proporzionale al diagramma del taglio.

Armare con sole staffe:



Si calcola il valore del taglio resistente V_{Rd1} "effetto pettine".

$$V_{Rd1} = 0.25 \cdot b_w \cdot d \cdot f_{ctd} \cdot r \cdot (1 + 50 \cdot \rho_s) \cdot \delta$$

Si calcola il valore della resistenza del conglomerato compresso e si verifica che in ogni sezione della trave questa non sia superata dal taglio sollecitante:

$$V_{Rd2} = 0.30 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d \geq V_{sd}$$

Se la verifica non fosse soddisfatta è necessario aumentare le dimensioni della sezione.

Si interseca la retta V_{Rd1} con il diagramma del taglio V_{sd} , in modo da individuare, se esiste, il tratto di trave che non necessita di armatura specifica a taglio.

Ove il taglio presenti un diagramma lineare si può procedere nel seguente modo:

$$V_{sd,max} : \frac{l}{2} = V_{Rd1} : \left(\frac{l}{2} - \Delta x \right)$$

Tratto che necessita di armatura specifica a taglio: Δx

Tratto che necessita di armatura minima da normativa: $l/2 - \Delta x$

Si divide il tratto Δx in parti di lunghezza costante Δx_i (generalmente si adotta $\Delta x_i = 100$ [cm]), e si determina il valore delle aree di taglio Ω_i .

Primo tratto: $\Omega_1 = (V_{sd,max}) \cdot \Delta x_1$

Secondo tratto: $\Omega_2 = (V_{sd,1}) \cdot \Delta x_2$

Terzo tratto: $\Omega_3 = (V_{sd,2}) \cdot \Delta x_3$

Poiché il passo delle staffe nel tratto Δx_i è definito come $s_i = \Delta x_i / n_{st,i}$ possiamo scrivere l'espressione finale che ci consente di determinare il numero di staffe necessarie nel tratto preso in considerazione:

$$\Omega = V_{wd} \cdot \Delta x$$

Primo tratto: $\Omega_1 = \left[\frac{0.9 \cdot d}{\frac{\Delta x_1}{n_{st,1}}} \cdot f_{sd} \cdot n_{b,1} \cdot A_{st,1} \right] \cdot \Delta x_1$

Secondo tratto: $\Omega_2 = \left[\frac{0.9 \cdot d}{\frac{\Delta x_2}{n_{st,2}}} \cdot f_{sd} \cdot n_{b,2} \cdot A_{st,2} \right] \cdot \Delta x_2$

Terzo tratto: $\Omega_3 = \left[\frac{0.9 \cdot d}{\frac{\Delta x_3}{n_{st,3}}} \cdot f_{sd} \cdot n_{b,3} \cdot A_{st,3} \right] \cdot \Delta x_3$

Dalle precedenti espressioni, fissando $A_{st,i}$ e $n_{b,i}$ si ricava il numero di staffe necessarie nel tratto Δx_i

Primo tratto: $n_{st,1min} \geq \frac{\Omega_1}{0.9 \cdot d \cdot f_{sd} \cdot n_{b,1} \cdot A_{st,1}}$

Secondo tratto:
$$n_{st,2min} \geq \frac{\Omega_2}{0.9 \cdot d \cdot f_{sd} \cdot n_{b,2} \cdot A_{st,2}}$$

Terzo tratto:
$$n_{st,3min} \geq \frac{\Omega_3}{0.9 \cdot d \cdot f_{sd} \cdot n_{b,3} \cdot A_{st,3}}$$

Dove:

Ω	Area di taglio
$n_{st,i}$	Numero di staffe necessarie nel tratto i – emo
A_{st}	Area del singolo braccio della staffa
n_b	Numero di braccia della staffa
Δx_i	Tratto di trave in cui le staffe hanno passo costante
s_i	Passo delle staffe

Una volta determinato il numero minimo di staffe per sopportare il taglio V_{sd} nel tratto Δx , si può procedere alla verifica della sezione:

Verifica delle staffe:

Primo tratto:
$$V_{Rd3} = \frac{0.9 \cdot d}{s_1} \cdot f_{sd} \cdot n_{b,1} \cdot A_{st,1} \geq V_{sd,max}$$

Secondo tratto:
$$V_{Rd3} = \frac{0.9 \cdot d}{s_2} \cdot f_{sd} \cdot n_{b,2} \cdot A_{st,2} \geq V_{sd,1}$$

Terza tratto:
$$V_{Rd3} = \frac{0.9 \cdot d}{s_3} \cdot f_{sd} \cdot n_{b,3} \cdot A_{st,3} \geq V_{sd,2}$$

Dove il passo $s_i = \frac{\Delta x_i}{n_{st,i}}$ è relativo al numero di staffe effettivamente assunto: $n_{st,i} \geq n_{st,i min}$

Si noti che nel calcolo di V_{Rd3} non è stato preso in considerazione il contributo V_{cd} del calcestruzzo resistente a trazione.

TAGLIO S.L.U. (Eurocodice 2 – UNI ENV 1992 4.3.2.2.)

Verifica per elementi che non richiedono armatura a taglio

Per le travi non armate a taglio la verifica di resistenza viene condotta tenendo conto del cosiddetto funzionamento a "pettine" :

$$V_{Rd1} = (\tau_{Rd} \cdot k \cdot (1.2 + 40 \cdot \rho_1) + 0.15 \cdot \sigma_{cp}) \cdot b_w \cdot d$$

Dove:

b_w Larghezza della membratura resistente a taglio

d Altezza utile della sezione

$k = (1.6 - d) \geq 1$ d = altezza utile della sezione, espressa in metri
 $d \leq 0.6 [m]$

$k = 1$ Per elementi in cui più del 50% dell'armatura tesa è interrotta

$\rho_s = \frac{A_s}{b_w \cdot d} \leq 0.02$ Rapporto geometrico dell'armatura tesa che si estende per non meno di $d + l_{b,net}$ oltre la sezione considerata

$\sigma_{cp} = \frac{N_{sd}}{A_c}$ N_{sd} forza longitudinale nella sezione dovuta ai carichi o alla precompressione (compressione positiva)

A_c area totale della sezione trasversale.

	f_{ck}	12	16	20	25	30	35	40	45	50
	R_{ck}	15	20	25	30	37	45	50	55	60
$\gamma_c = 1.5$	τ_{Rd}	0.18	0.22	0.26	0.30	0.34	0.37	0.41	0.44	0.48
$\gamma_c = 1.6$	τ_{Rd}	0.17	0.21	0.24	0.28	0.32	0.35	0.38	0.41	0.45

Verifica:

$$\begin{cases} V_{Rd1} \geq V_{sd} & \text{Armatura a taglio minima da normativa} \\ V_{Rd1} < V_{sd} & \text{E' necessario predisporre armatura a taglio} \end{cases}$$

Verifica del conglomerato compresso

Staffe ortogonali:

$$V_{Rd_2} = \frac{1}{2} \cdot \nu \cdot f_{cd} \cdot 0.90 \cdot b_w \cdot d$$

Ferri piegati:

$$V_{Rd_2} = \frac{1}{2} \cdot \nu \cdot f_{cd} \cdot 0.90 \cdot b_w \cdot d \cdot \left(1 + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right)$$

Se nella sezione è presente una forza assiale il valore di V_{Ed_2} deve essere corretto nel seguente modo:

$$V_{Rd_2,red} = 1.67 \cdot V_{Rd_2} \cdot \left(1 - \frac{\sigma_{cp}}{f_{cd}} \right) \leq V_{Rd_2}$$

Dove:

f_{ck}

Resistenza caratteristica a compressione (da tabella)

$$f_{cd} = \nu \cdot \frac{f_{ck}}{\gamma_c}$$

Resistenza di calcolo a compressione ($\gamma_c = 1.6$)

Generalmente $\nu = 0.85$ per tenere conto dei carichi di lunga durata.

$$\nu = 0.7 - \frac{f_{ck}}{200} \geq 0.5$$

Verifica:

$$\begin{cases} V_{Rd_2} \geq V_{sd} & \text{La sezione in calcestruzzo è idonea} \\ V_{Rd_2} < V_{sd} & \text{Si deve aumentare la sezione in calcestruzzo} \end{cases}$$

Verifica per elementi che richiedono armatura a taglio

Se la sezione non è in grado di sopportare la sollecitazione V_{sd} unicamente attraverso l'effetto pettine, sarà necessario predisporre un'armatura specifica a taglio (Staffe o staffe e ferri piegati).

Verifica del calcestruzzo teso e delle armature a taglio

L'Euro codice 2 prescrive che le staffe debbano assorbire almeno il 50% del taglio V_{sd} . Ciò significa che l'intero valore del taglio può essere affidato alle sole staffe ma non ai soli ferri piegati.

Verifica:

$$V_{Rd_3} = V_{wd} \geq V_{sd}$$

Resistenza delle armature:

$$V_{wd} = \frac{0.9 \cdot d}{s_s} \cdot f_{sd} \cdot n_b \cdot A_{st}$$

(staffe dritte)

$$V_{wd} = \frac{0.9 \cdot d}{s_p} \cdot f_{sd} \cdot A_{fp} \cdot (\sin \alpha + \cos \alpha)$$

(ferri piegati)

Dove:

f_{sd}	Resistenza di calcolo delle armature
n_b	Numero braccia delle staffe
A_{st}	Area del singolo ferro costituente la staffa
A_{fp}	Area del singolo ferro costituente il ferro piegato
s_s	Passo delle staffe
s_p	Passo dei ferri piegati
