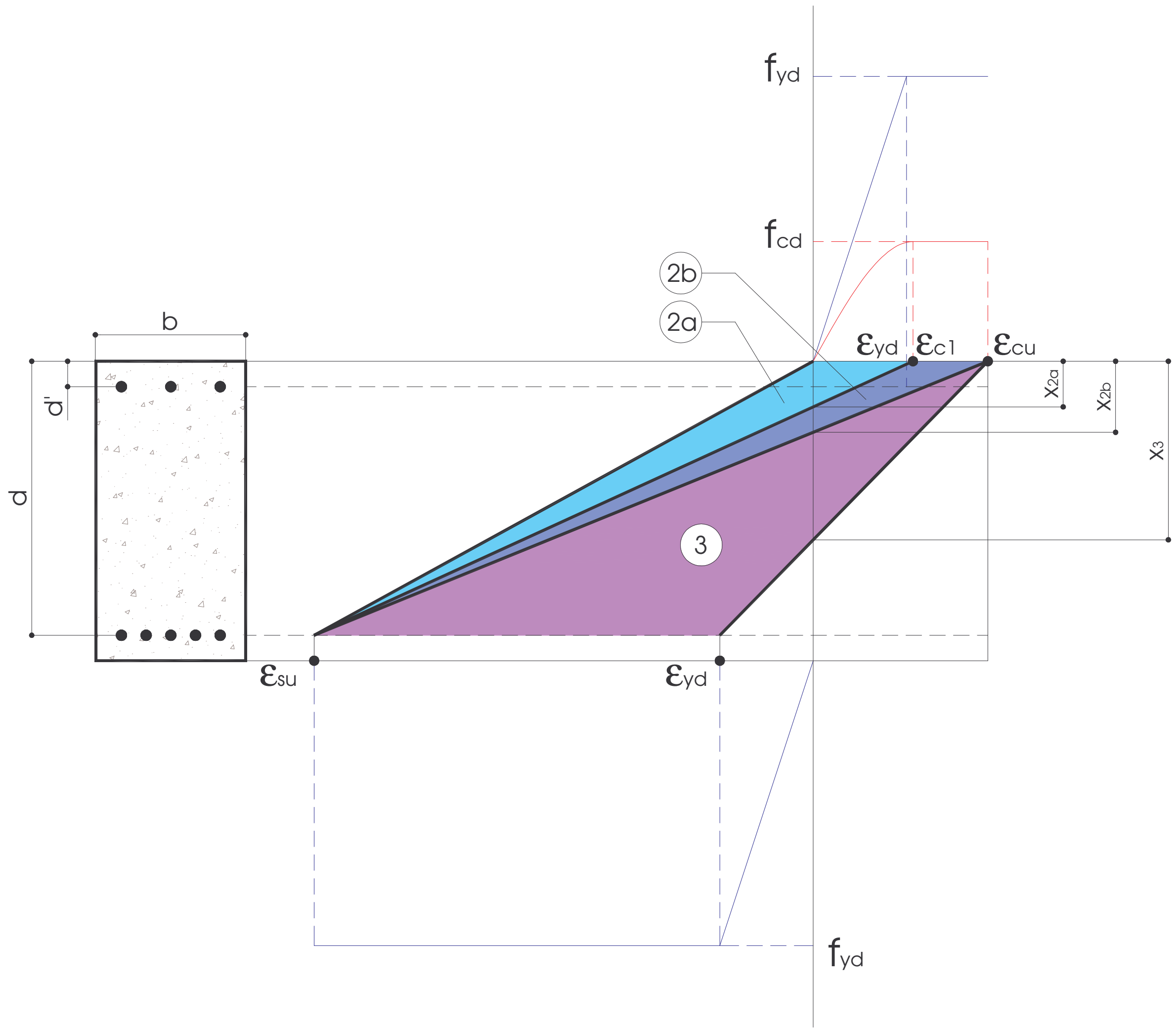
1. Flessione Semplice Retta



1.1. Leggi costitutive del calcestruzzo

Per il calcestruzzo si utilizza la legge costitutiva "parabola – rettangolo" :

- Per $\varepsilon_c \le \varepsilon_{c1} = 0.002$ si ha $\sigma_c = f_{cd} \cdot 1000 \cdot \varepsilon_c \cdot (1 - 250 \cdot \varepsilon_c)$ (parabola)
- Per $\varepsilon_{c1} < \varepsilon_c \le \varepsilon_{cu} = 0.0035$ si ha $\sigma_c = f_{cd}$ (rettangolo)

Dove f_{cd} rappresenta la resistenza di calcolo del calcestruzzo: $f_{cd} = \dfrac{0.85 \cdot f_{ck}}{\gamma_c}$

- Resistenza caratteristica cubica del calcestruzzo: R_{ck} (MPa)
- Resistenza caratteristica cilindrica del calcestruzzo: $f_{ck} = 0.83 \cdot R_{ck}$ (MPa)
- Coefficiente di sicurezza: $\gamma_c = 1.60$ (-)
- Modulo di elasticità secante: $E_{cm} = 9.5 \cdot [f_{ck} + 8]^{\frac{1}{3}}$ (kN/mm²)

1.2. Leggi costitutive dell'acciaio

Per l'acciaio si utilizza la legge costitutiva bilineare:

- Ferri d'armatura soggetti a compressione:
  - Per $\varepsilon'_s \le \varepsilon_{yd} = \dfrac{f_{yd}}{E_s}$ si ha $\sigma_s = E_s \cdot \varepsilon'_s$
  - Per $\varepsilon_{yd} < \varepsilon'_s \le \varepsilon_{cu} = 0.0035$ si ha $\sigma_s = f_{yd}$
- Ferri d'armatura soggetti a trazione:
  - Per $\varepsilon_s \le \varepsilon_{yd} = \dfrac{f_{yd}}{E_s}$ si ha $\sigma_s = E_s \cdot \varepsilon_s$
  - Per $\varepsilon_{yd} < \varepsilon_s \le \varepsilon_{su} = 0.01$ si ha $\sigma_s = f_{yd}$

Dove f_{yd} rappresenta la resistenza di calcolo dell'armatura: $f_{yd} = \dfrac{f_{yk}}{\gamma_s}$

Si noti che la deformazione a snervamento ε_{yd} dipende dal tipo di acciaio utilizzato, ad esempio per un acciaio Feb44k/s i valori di calcolo risultano:

- Resistenza caratteristica dell'acciaio Feb44k/s: $f_{yk} = 430$ (MPa)
- Resistenza di calcolo dell'acciaio Feb44k/s: $f_{yd} = \dfrac{430}{1.15} = 373.9$ (MPa)
- Modulo di elasticità: $E_s = 206000$ (MPa)
- Deformazione di calcolo a snervamento Feb44k/s: $\varepsilon_{yd} = \dfrac{373.9}{206000} = 0.001815$ (-)

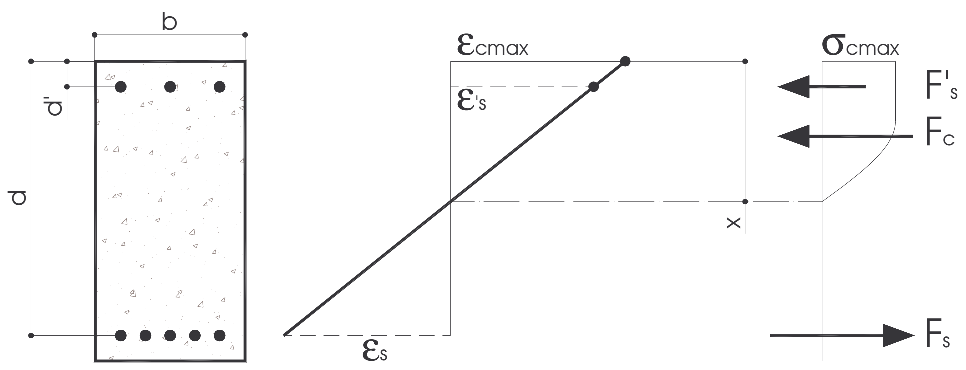
La deformazione a rottura dell'acciaio è convenzionale: nel caso delle armature compresse non può superare il valore di deformazione limite del calcestruzzo $\varepsilon_{cu} = 0.0035$, nel caso di armature tese non può superare il valore di deformazione pari all' 1% perché oltre non è più garantita l'aderenza tra calcestruzzo e acciaio.

1.3. Calcolo generale di una sezione soggetta a flessione semplice retta

Il calcolo a stato limite ultimo presuppone che uno dei due materiali costituenti la sezione, o entrambi siano in condizione di rottura. Non si può avere uno stato limite ultimo se l'acciaio o il calcestruzzo o entrambi i materiali non raggiungano lo stato di crisi, per tanto si possono avere solo le seguenti condizioni:

- Acciaio a rottura per raggiungimento della deformazione limite: $\varepsilon_s = \varepsilon_{su} = 0.01$
- Calcestruzzo a rottura per raggiungimento della deformazione limite: $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu} = 0.0035$
- Rottura contemporanea di entrambi i materiali: $\begin{cases} \varepsilon_s = 0.01 \\ \varepsilon_c = 0.0035 \end{cases}$

Poiché lo stato tensionale in condizione di rottura non ha un andamento lineare, è necessario far sempre riferimento alla deformazione della sezione, poiché si assume che questa si mantenga piana. Di conseguenza esiste sempre una relazione lineare tra le deformazioni dell'acciaio e del calcestruzzo ma non tra le tensioni.



Se la sezione è sollecitata a Flessione semplice e quindi in assenza di forza normale, la somma delle forze interne alla sezione deve essere pari a zero:

$$F_c + F_s' - F_s = 0$$

$$\int_0^x \sigma_c \cdot b \cdot dx + A_s' \cdot \sigma_s' - A_s \cdot \sigma_s = 0$$

Passando dalle tensioni ai valori limite di resistenza l'equazione precedente può essere scritta nel seguente modo:

$$\beta \cdot x \cdot b \cdot f_{cd} + A_s' \cdot \alpha_s' \cdot f_{yd} - A_s \cdot \alpha_s \cdot f_{yd} = 0 \qquad \text{dove:} \qquad \begin{cases} \alpha_s' = \dfrac{\sigma_s'}{f_{yd}} \le 1 \\ \alpha_s = \dfrac{\sigma_s}{f_{yd}} \le 1 \end{cases}$$

Il coefficiente β , detto coefficiente di riempimento varia in funzione della distribuzione delle tensioni nel calcestruzzo e per tanto la sua espressione è differente in base al campo di rottura in cui si trova la sezione.
I coefficienti α non possono ovviamente essere maggiori di 1, ma almeno uno di essi deve essere pari a 1 perché a stato limite ultimo almeno uno dei materiali costituenti la sezione deve raggiungere i valore limite di resistenza.

Al fine di rendere l'equazione di equilibrio alla traslazione più semplice si possono definire i seguenti termini:

- Posizione adimensionale dell'asse neutro: $\xi = \dfrac{x}{d}$
- Rapporto tra l'armatura compressa e l'armatura tesa: $\rho = \dfrac{A_s'}{A_s}$
- Percentuale meccanica dell'armatura tesa: $\omega_s = \dfrac{A_s \cdot f_{yd}}{b \cdot d \cdot f_{cd}}$

$$\beta \cdot \xi \cdot d \cdot b \cdot f_{cd} + \rho \cdot A_s \cdot \alpha_s' \cdot f_{yd} - A_s \cdot \alpha_s \cdot f_{yd} = 0$$

$$\beta \cdot \xi = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{b \cdot d \cdot f_{cd}} \cdot (\alpha_s - \alpha_s' \cdot \rho) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\beta \cdot \xi = \omega_s \cdot (\alpha_s - \alpha_s' \cdot \rho)}$$

Una volta determinata la posizione dell'asse neutro x, si può calcolare il momento resistente della sezione imponendo l'equilibrio alla rotazione:

$$\boxed{M_{Rd} = \beta \cdot x \cdot b \cdot f_{cd} \cdot (d - \kappa \cdot x) + \alpha_s' \cdot A_s' \cdot f_{yd} \cdot (d - d')}$$

Si noti che l'espressione del momento resistente è calcolata rispetto all'armatura tesa, tuttavia in una sezione semplicemente inflessa il polo può essere scelto arbitrariamente. Il valore di κ , come quello di β, dipende dal campo di rottura nel quale si trova la sezione.

Campi di rottura

La geometria della sezione e la percentuale di armatura incidono sul meccanismo di rottura della sezione in oggetto. Nel caso di flessione semplice si possono individuare 4 campi di rottura:

- **Campo 2a**: $\begin{cases} \varepsilon_s = \varepsilon_{su} = 0.01 \\ 0 \leq \varepsilon_{cmax} \leq \varepsilon_{c1} = 0.002 \end{cases}$

Il limite del campo 2a è definito dalla posizione dell'asse neutro: $x \in [0; x_{2a}]$

Dalla linearità del diagramma delle deformazioni di ottiene:

$$\varepsilon_{c1} : x_{2a} = \varepsilon_{su} : (d - x_{2a})$$

$$\varepsilon_{su} \cdot x_{2a} = \varepsilon_{c1} \cdot d - \varepsilon_{c1} \cdot x_{2a}$$

$$x_{2a} = \frac{\varepsilon_{c1}}{\varepsilon_{su} + \varepsilon_{c1}} \cdot d \quad \Rightarrow \quad \boxed{\xi_{2a} = \frac{x_{2a}}{d} = \frac{\varepsilon_{c1}}{\varepsilon_{su} + \varepsilon_{c1}} = \frac{0.002}{0.01 + 0.002} = 0.1667}$$

Coefficiente di riempimento: $\boxed{\beta = 500 \cdot \varepsilon_{cmax} - \frac{250000}{3} \cdot \varepsilon_{cmax}^2}$

Coefficiente di baricentro: $\boxed{\kappa = \frac{125 \cdot \varepsilon_{cmax} - 1}{500 \cdot \varepsilon_{cmax} - 3}}$

Dalla linearità del diagramma delle deformazioni di ottiene:

$$\varepsilon_{cmax} : x = \varepsilon_{su} : (d - x)$$

$$\varepsilon_{cmax} = \frac{x}{d - x} \cdot \varepsilon_{su} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_{cmax} = \frac{\xi}{1 - \xi} \cdot \varepsilon_{su}}$$

$$\varepsilon_s' : (x - d') = \varepsilon_{su} : (d - x)$$

$$\varepsilon_s' = \frac{x - d'}{d - x} \cdot \varepsilon_{su} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_s' = \frac{\frac{x}{d} - \frac{d'}{d}}{\frac{d}{d} - \frac{x}{d}} \cdot \varepsilon_{su} = \frac{\xi - \delta}{1 - \xi} \cdot \varepsilon_{su}}$$

Coefficienti α $\Rightarrow$ $\begin{cases} \alpha_s' = \frac{\sigma_s'}{f_{yd}} = \frac{\varepsilon_s' \cdot E}{\varepsilon_{yd} \cdot E} = \frac{\xi - \delta}{1 - \xi} \cdot \frac{\varepsilon_{su}}{\varepsilon_{yd}} \\ \alpha_s = 1 \end{cases}$

- **Campo 2b**: $\begin{cases} \varepsilon_s = \varepsilon_{su} = 0.01 \\ \varepsilon_{c1} \leq \varepsilon_{cmax} \leq \varepsilon_{cu} = 0.0035 \end{cases}$

Il limite del campo 2b è definito dalla posizione dell'asse neutro: $x \in [x_{2a}; x_{2b}]$

Dalla linearità del diagramma delle deformazioni di ottiene:

$$\varepsilon_{cu} : x_{2b} = \varepsilon_{su} : (d - x_{2b})$$

$$\varepsilon_{su} \cdot x_{2b} = \varepsilon_{cu} \cdot d - \varepsilon_{cu} \cdot x_{2b}$$

$$x_{2b} = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{su} + \varepsilon_{cu}} \cdot d \quad \Rightarrow \quad \boxed{\xi_{2b} = \frac{x_{2b}}{d} = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{su} + \varepsilon_{cu}} = \frac{0.0035}{0.01 + 0.0035} = 0.2593}$$

Coefficiente di riempimento: $\boxed{\beta = \frac{1500 \cdot \varepsilon_{cmax} - 1}{1500 \cdot \varepsilon_{cmax}}}$

Coefficiente di baricentro: $\boxed{\kappa = \frac{1500000 \cdot \varepsilon_{cmax}^2 - 2000 \cdot \varepsilon_{cmax} + 1}{2000 \cdot \varepsilon_{cmax} \cdot (1500 \cdot \varepsilon_{cmax} - 1)}}$

Dalla linearità del diagramma delle deformazioni di ottiene:

$$\varepsilon_{cmax} : x = \varepsilon_{su} : (d - x)$$

$$\varepsilon_{cmax} = \frac{x}{d-x} \cdot \varepsilon_{su} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_{cmax} = \frac{\xi}{1-\xi} \cdot \varepsilon_{su}}$$

$$\varepsilon_s' : (x - d') = \varepsilon_{su} : (d - x)$$

$$\varepsilon_s' = \frac{x-d'}{d-x} \cdot \varepsilon_{su} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_s' = \frac{\frac{x}{d} - \frac{d'}{d}}{\frac{d}{d} - \frac{x}{d}} \cdot \varepsilon_{su} = \frac{\xi - \delta}{1-\xi} \cdot \varepsilon_{su}}$$

Coefficienti α $\quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} \alpha_s' = \frac{\sigma_s'}{f_{yd}} = \frac{\varepsilon_s' \cdot E}{\varepsilon_{yd} \cdot E} = \frac{\xi - \delta}{1-\xi} \cdot \frac{\varepsilon_{su}}{\varepsilon_{yd}} \\ \alpha_s = 1 \end{cases}}$

- **Campo 3**: $\boxed{\begin{cases} \varepsilon_{yd} \le \varepsilon_s < \varepsilon_{su} = 0.01 \\ \varepsilon_{cmax} = \varepsilon_{cu} = 0.0035 \end{cases}}$

Il limite del campo 3 è definito dalla posizione dell'asse neutro: $x \in [x_{2b}; x_3]$
Dalla linearità del diagramma delle deformazioni di ottiene:

$$\varepsilon_{cu} : x_3 = \varepsilon_{yd} : (d - x_{2b})$$

$$\varepsilon_{yd} \cdot x_3 = \varepsilon_{cu} \cdot d - \varepsilon_{cu} \cdot x_3$$

$$x_3 = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd} + \varepsilon_{cu}} \cdot d \quad \Rightarrow \quad \boxed{\xi_3 = \frac{x_3}{d} = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd} + \varepsilon_{cu}} = \frac{0.0035}{\varepsilon_{yd} + 0.0035}}$$

Si noti che x_3 essendo funzione di ε_{yd} dipende dal tipo di acciaio utilizzato:

$$\xi_3 (Feb44k / s) = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd} + \varepsilon_{cu}} = \frac{0.0035}{0.001815 + 0.0035} = 0.6585$$

Coefficiente di riempimento: $\boxed{\beta = 0.80}$

Coefficiente di baricentro: $\boxed{\kappa = 0.40}$

Dalla linearità del diagramma delle deformazioni di ottiene:

$$\varepsilon_{cu} : x = \varepsilon_s : (d - x)$$

$$\varepsilon_s = \frac{d-x}{x} \cdot \varepsilon_{cu} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_s = \frac{1-\xi}{\xi} \cdot \varepsilon_{cu}}$$

$$\varepsilon_{cu} : x = \varepsilon'_s : (x - d')$$

$$\varepsilon'_s = \frac{x - d'}{x} \cdot \varepsilon_{cu} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon'_s = \frac{\xi - \delta}{\xi} \cdot \varepsilon_{cu}}$$

Coefficienti α $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \alpha'_s = \dfrac{\sigma'_s}{f_{yd}} = \dfrac{\varepsilon'_s \cdot E}{\varepsilon_{yd} \cdot E} = \dfrac{\xi - \delta}{\xi} \cdot \dfrac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} \\ \alpha_s = 1 \end{cases}$$

- **Campo 4**:

$$\boxed{\begin{cases} 0 \le \varepsilon_s < \varepsilon_{yd} \\ \varepsilon_{cmax} = \varepsilon_{cu} = 0.0035 \end{cases}}$$

Omettiamo la verifica del campo 4 perché la rottura della sezione avviene con comportamento fragile e come tale non è ammessa dalla Normativa.

<u>**Tabella dei coefficienti di riempimento e di baricentro in funzione di**</u> ε_{cmax}

ε_{cmax}	β	κ	ε_{cmax}	β	κ
0,00000	**0,0000**	**0,3333**	0,00175	0,6198	0,3676
0,00005	0,0248	0,3340	0,00180	0,6300	0,3690
0,00010	0,0492	0,3347	0,00185	0,6398	0,3705
0,00015	0,0731	0,3355	0,00190	0,6492	0,3720
0,00020	0,0967	0,3362	0,00195	0,6581	0,3735
0,00025	0,1198	0,3370	**0,00200**	**0,6667**	**0,3750**
0,00030	0,1425	0,3377	0,00205	0,6748	0,3766
0,00035	0,1648	0,3385	0,00210	0,6825	0,3782
0,00040	0,1867	0,3393	0,00215	0,6899	0,3798
0,00045	0,2081	0,3401	0,00220	0,6970	0,3814
0,00050	0,2292	0,3409	0,00225	0,7037	0,3830
0,00055	0,2498	0,3417	0,00230	0,7101	0,3846
0,00060	0,2700	0,3426	0,00235	0,7163	0,3862
0,00065	0,2898	0,3435	0,00240	0,7222	0,3878
0,00070	0,3092	0,3443	0,00245	0,7279	0,3894
0,00075	0,3281	0,3452	0,00250	0,7333	0,3909
0,00080	0,3467	0,3462	0,00255	0,7386	0,3924
0,00085	0,3648	0,3471	0,00260	0,7436	0,3939
0,00090	0,3825	0,3480	0,00265	0,7484	0,3954
0,00095	0,3998	0,3490	0,00270	0,7531	0,3968
0,00100	0,4167	0,3500	0,00275	0,7576	0,3982
0,00105	0,4331	0,3510	0,00280	0,7619	0,3996
0,00110	0,4492	0,3520	0,00285	0,7661	0,4009
0,00115	0,4648	0,3531	0,00290	0,7701	0,4022
0,00120	0,4800	0,3542	0,00295	0,7740	0,4035
0,00125	0,4948	0,3553	0,00300	0,7778	0,4048
0,00130	0,5092	0,3564	0,00305	0,7814	0,4060
0,00135	0,5231	0,3575	0,00310	0,7849	0,4072
0,00140	0,5367	0,3587	0,00315	0,7884	0,4084
0,00145	0,5498	0,3599	0,00320	0,7917	0,4095
0,00150	0,5625	0,3611	0,00325	0,7949	0,4107
0,00155	0,5748	0,3624	0,00330	0,7980	0,4118
0,00160	0,5867	0,3636	0,00335	0,8010	0,4129
0,00165	0,5981	0,3649	0,00340	0,8039	0,4139
0,00170	0,6092	0,3663	0,00345	0,8068	0,4150
0,00175	0,6198	0,3676	**0,00350**	**0,8095**	**0,4160**

1.4. Algoritmo di calcolo di una sezione a doppia armatura semplicemente inflessa

Di seguito si riporta l'algoritmo di calcolo di una sezione soggetta a flessione semplice in funzione del campo di rottura in qui essa si trova:

- PASSO 1°: Determinazione della percentuale meccanica d'armatura tesa

$$\omega_s = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{b \cdot d \cdot f_{cd}}$$

- PASSO 2°: Determinazione della percentuale meccanica d'armatura ω_{2b}

$$\left\{\begin{array}{l} \beta \cdot \xi = \omega_s \cdot (\alpha_s - \alpha_s' \cdot \rho) \\ \beta = \beta_{2b} = 0.8095 \\ \xi = \xi_{2b} = 0.2593 \\ \omega_s = \omega_{2b} \\ \alpha_s = 1.00 \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{\left\{\begin{array}{l} \omega_{2b} = \dfrac{\beta_{2b} \cdot \xi_{2b}}{\alpha_s - \alpha_s' \cdot \rho} = \dfrac{0.2099}{1 - \alpha_s' \cdot \rho} \\ \alpha_s' = \min\left[\dfrac{\xi_{2b} - \delta}{1 - \xi_{2b}} \cdot \dfrac{\varepsilon_{su}}{\varepsilon_{yd}}; 1\right] \end{array}\right.}$$

- PASSO 3°: Determinazione della percentuale meccanica d'armatura ω_{2a}

$$\left\{\begin{array}{l} \beta \cdot \xi = \omega_s \cdot (\alpha_s - \alpha_s' \cdot \rho) \\ \beta = \beta_{2a} = 0.6667 \\ \xi = \xi_{2a} = 0.1667 \\ \omega_s = \omega_{2a} \\ \alpha_s = 1.00 \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{\left\{\begin{array}{l} \omega_{2a} = \dfrac{\beta_{2a} \cdot \xi_{2a}}{\alpha_s - \alpha_s' \cdot \rho} = \dfrac{0.1111}{1 - \alpha_s' \cdot \rho} \\ \alpha_s' = \min\left[\dfrac{\xi_{2a} - \delta}{1 - \xi_{2a}} \cdot \dfrac{\varepsilon_{su}}{\varepsilon_{yd}}; 1\right] \end{array}\right.}$$

- PASSO 4°: Determinazione del campo di rottura della sezione

Se $\omega_s > \omega_{2b}$ rottura in campo 3

Se $\omega_{2a} \le \omega_s \le \omega_{2b}$ rottura in campo 2b

Se $\omega_s < \omega_{2a}$ rottura in campo 2a

Una volta determinato in modo univoco il campo di rottura si può passare alla determinazione del Momento resistente della sezione:

Rottura in campo 2a

- Si assume un valore di ξ di prova : $\xi \in [0; \xi_{2a} = 0.1667]$
- Si determina il valore della deformazione nel calcestruzzo: $\varepsilon_{cmax} = \dfrac{\xi}{1-\xi} \cdot \varepsilon_{su}$
- Si determina il valore di β : $\beta = 500 \cdot \varepsilon_{cmax} - \dfrac{250000}{3} \cdot \varepsilon_{cmax}^2$
- Si determina il valore di α_s' : $\alpha_s' = \min\left[\dfrac{\xi - \delta}{1 - \xi} \cdot \dfrac{\varepsilon_{su}}{\varepsilon_{yd}}; 1\right]$
- Si valuta la tendenza a zero dell'equazione di equilibrio: $\beta \cdot \xi - \omega_s \cdot (1 - \alpha_s' \cdot \rho) = 0$

Si prova fin quando si trova un valore di ξ che avvicina l'equazione di equilibrio al valore nullo.

- Si determina la posizione dell'asse neutro: $x = \xi \cdot d$
- Si determina il valore di κ : $\kappa = \dfrac{125 \cdot \varepsilon_{cmax} - 1}{500 \cdot \varepsilon_{cmax} - 3}$
- Si determina il momento resistente:

$$\boxed{M_{Rd} = \beta \cdot x \cdot b \cdot f_{cd} \cdot [d - \kappa \cdot x] + A_s' \cdot \alpha_s' \cdot f_{yd} \cdot [d - d']}$$

Esempio

Calcolare il momento resistente di una sezione 30 x 50 (cm) ordita con 4Φ16 superiori e 5Φ16 inferiori. Si assumano 3 (cm) di copriferro, una classe del calcestruzzo C25/30 e armature in acciaio Feb44k/s:

Armatura superiore: $A'_s = 4 \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} = 4 \cdot \frac{\pi \cdot 16^2}{4} = 804$ (mm²)

Armatura inferiore: $A_s = 4 \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} = 5 \cdot \frac{\pi \cdot 16^2}{4} = 1005$ (mm²)

Resistenza di calcolo del calcestruzzo: $f_{cd} = \frac{0.85 \cdot 0.83 \cdot R_{ck}}{1.6} = \frac{0.85 \cdot 0.83 \cdot 30}{1.6} = 13.23$ (MPa)

Resistenza di calcolo delle armature: $f_{yd} = \frac{430}{1.15} = 373.9$ (MPa)

Percentuale meccanica d'armatura: $\omega_s = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{b \cdot d \cdot f_{cd}} = \frac{1005 \cdot 373.9}{300 \cdot (500-30) \cdot 13.23} = 0.2014$ (-)

$$\begin{cases} \omega_{2b} = \dfrac{0.2099}{1-\alpha'_s \cdot \rho} = \dfrac{0.2099}{1-\dfrac{804}{1005}} = 1.049 \\ \alpha'_s = \min\left[\dfrac{\xi_{2b}-\delta}{1-\xi_{2b}} \cdot \dfrac{\varepsilon_{su}}{\varepsilon_{yd}};1\right] = \min\left[\dfrac{0.2593-\dfrac{30}{500-30}}{1-0.2593} \cdot \dfrac{0.01}{\dfrac{373.9}{206000}};1\right] = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_{2a} = \dfrac{0.1111}{1-\alpha'_s \cdot \rho} = \dfrac{0.1111}{1-0.68 \cdot \dfrac{804}{1005}} = 0.24 \\ \alpha'_s = \min\left[\dfrac{\xi_{2a}-\delta}{1-\xi_{2a}} \cdot \dfrac{\varepsilon_{su}}{\varepsilon_{yd}};1\right] = \min\left[\dfrac{0.1667-\dfrac{30}{500-30}}{1-0.1667} \cdot \dfrac{0.01}{\dfrac{373.9}{206000}};1\right] = 0.68 \end{cases}$$

Visto che $\omega_s < \omega_{2a} = 0.24$ la sezione si rompe in campo 2a.

ξ di tentativo	ε_{cmax}	β	α'_s	$\beta \cdot \xi - \omega_s \cdot (1-\alpha'_s \cdot \rho)$
0.0000	0.0000	0.0000	-0.3516	-0.25812
0.1667	0.0020	0.6675	0.6824	0.01999
0.1590	0.0019	0.6474	0.6235	0.00198
0.1581	0.0019	0.6451	0.6171	0.00001

La posizione dell'asse neutro risulta: $x = \xi \cdot d = 0.1581 \cdot 470 = 74.31$ (mm)

Coefficiente di baricentro: $\kappa = \frac{125 \cdot \varepsilon_{cmax} - 1}{500 \cdot \varepsilon_{cmax} - 3} = \frac{125 \cdot 0.0019 - 1}{500 \cdot 0.0019 - 3} = 0.3719$ (-)

Il momento resistente risulta: $M_{Rd} = \beta \cdot x \cdot b \cdot f_{cd} \cdot [d - \kappa \cdot x] + A'_s \cdot \alpha'_s \cdot f_{yd} \cdot [d - d']$

$$M_{Rd} = \frac{0.6451 \cdot 74.31 \cdot 300 \cdot 13.23 \cdot [470 - 0.3719 \cdot 74.31] + 804 \cdot 0.6171 \cdot 373.9 \cdot [470-30]}{10^6} = 165.80 \quad \text{(kN)}$$

Deformazione nell'armatura compressa: $\varepsilon'_s = \frac{\xi - \delta}{1-\xi} \cdot \varepsilon_{su} = \frac{0.1581 - 0.0638}{1 - 0.1581} \cdot 0.01 = 0.00112 < \varepsilon_{yd}$

Rottura in campo 2b

- Si assume un valore di ξ di prova : $\xi \in \left[\xi_{2a} = 0.1667; \xi_{2b} = 0.2593\right]$
- Si determina il valore della deformazione nel calcestruzzo: $\varepsilon_{cmax} = \frac{\xi}{1-\xi} \cdot \varepsilon_{su}$
- Si determina il valore di β : $\beta = \frac{1500 \cdot \varepsilon_{cmax} - 1}{1500 \cdot \varepsilon_{cmax}}$
- Si determina il valore di α'_s : $\alpha'_s = \min\left[\frac{\xi - \delta}{1-\xi} \cdot \frac{\varepsilon_{su}}{\varepsilon_{yd}};1\right]$
- Si valuta la tendenza a zero dell'equazione di equilibrio: $\beta \cdot \xi - \omega_s \cdot \left(1 - \alpha'_s \cdot \rho\right) = 0$

Si prova fin quando si trova un valore di ξ che avvicina l'equazione di equilibrio al valore nullo.

- Si determina la posizione dell'asse neutro: $x = \xi \cdot d$
- Si determina il valore di κ : $\kappa = \frac{1500000 \cdot \varepsilon_{cmax}^2 - 2000 \cdot \varepsilon_{cmax} + 1}{2000 \cdot \varepsilon_{cmax} \cdot \left(1500 \cdot \varepsilon_{cmax} - 1\right)}$
- Si determina il momento resistente:

$$\boxed{M_{Rd} = \beta \cdot x \cdot b \cdot f_{cd} \cdot \left[d - \kappa \cdot x\right] + A'_s \cdot \alpha'_s \cdot f_{yd} \cdot \left[d - d'\right]}$$

Esempio

Calcolare il momento resistente di una sezione 30 x 50 (cm) ordita con 4Φ16 superiori e 4Φ22 inferiori. Si assumano 3 (cm) di copriferro, una classe del calcestruzzo C25/30 e armature in acciaio Feb44k/s:

Armatura superiore: $A'_s = 4 \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} = 4 \cdot \frac{\pi \cdot 16^2}{4} = 804$ (mm²)

Armatura inferiore: $A_s = 4 \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} = 4 \cdot \frac{\pi \cdot 22^2}{4} = 1521$ (mm²)

Resistenza di calcolo del calcestruzzo: $f_{cd} = \frac{0.85 \cdot 0.83 \cdot R_{ck}}{1.6} = \frac{0.85 \cdot 0.83 \cdot 30}{1.6} = 13.23$ (MPa)

Resistenza di calcolo delle armature: $f_{yd} = \frac{430}{1.15} = 373.9$ (MPa)

Percentuale meccanica d'armatura: $\omega_s = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{b \cdot d \cdot f_{cd}} = \frac{1521 \cdot 373.9}{300 \cdot (500-30) \cdot 13.23} = 0.3048$ (-)

$$\begin{cases} \omega_{2b} = \frac{0.2099}{1-\alpha'_s \cdot \rho} = \frac{0.2099}{1-\frac{804}{1521}} = 0.4453 \\ \alpha'_s = \min\left[\frac{\xi_{2b} - \delta}{1-\xi_{2b}} \cdot \frac{\varepsilon_{su}}{\varepsilon_{yd}};1\right] = \min\left[\frac{0.2593 - \frac{30}{500-30}}{1-0.2593} \cdot \frac{0.01}{\frac{373.9}{206000}};1\right] = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_{2a} = \frac{0.1111}{1-\alpha'_s \cdot \rho} = \frac{0.1111}{1-0.68 \cdot \frac{804}{1521}} = 0.1734 \\ \alpha'_s = \min\left[\frac{\xi_{2a} - \delta}{1-\xi_{2a}} \cdot \frac{\varepsilon_{su}}{\varepsilon_{yd}};1\right] = \min\left[\frac{0.1667 - \frac{30}{500-30}}{1-0.1667} \cdot \frac{0.01}{\frac{373.9}{206000}};1\right] = 0.68 \end{cases}$$

Visto che $\omega_{2a} < \omega_s < \omega_{2b}$ la sezione si rompe in campo 2b.

ξ di tentativo	ε_{cmax}	β	α'_s	$\beta \cdot \xi - \omega_s \cdot (1 - \alpha'_s \cdot \rho)$
0,1667	0,0020	0,6667	0,6801	-0,08411
0,2593	0,0035	0,8096	1,4540	0,13936
0,2000	0,0025	0,7333	0,9378	-0,00707
0,2030	0,0025	0,7383	0,9621	0,00004

La posizione dell'asse neutro risulta: $x = \xi \cdot d = 0.2030 \cdot 470 = 95.41$ (mm)

Coefficiente di baricentro: $\kappa = \dfrac{1500000 \cdot \varepsilon_{cmax}^2 - 2000 \cdot \varepsilon_{cmax} + 1}{2000 \cdot \varepsilon_{cmax} \cdot (1500 \cdot \varepsilon_{cmax} - 1)}$ =0.39 (-)

Il momento resistente risulta: $M_{Rd} = \beta \cdot x \cdot b \cdot f_{cd} \cdot [d - \kappa \cdot x] + A'_s \cdot \alpha'_s \cdot f_{yd} \cdot [d - d']$

$$M_{Rd} = \frac{0.7383 \cdot 95.41 \cdot 300 \cdot 13.23 \cdot [470 - 0.39 \cdot 95.41] + 804 \cdot 0.9621 \cdot 373.9 \cdot [470 - 30]}{10^6} = 248.25 \quad \text{(kN)}$$

Deformazione nell'armatura compressa: $\varepsilon'_s = \dfrac{\xi - \delta}{1 - \xi} \cdot \varepsilon_{su} = \dfrac{0.2030 - 0.0638}{1 - 0.2030} \cdot 0.01 = 0.00174 < \varepsilon_{yd}$

<u>Rottura in campo 3</u>

La rottura in campo 3 assicura che il calcestruzzo abbia raggiunto la deformazione ultima di rottura $\varepsilon_{cmax} = \varepsilon_{cu} = 0.0035$ e l'armatura tesa abbia raggiunto una deformazione compresa tra il valore di snervamento e quello convenzionale di rottura $\varepsilon_{yd} \le \varepsilon_s \le \varepsilon_s = 0.01$, ciò implica che la tensione nel calcestruzzo è pari al suo valore di calcolo f_{cd}, e la tensione nell'armatura tesa è pari al suo valore di calcolo f_{yd}. L'unica incognita è la deformazione nell'armatura compressa che può aver raggiunto o meno la deformazione di snervamento pari a ε_{yd}.

- Si ipotizzano entrambe le armature snervate e si determina l'asse neutro:

$$0.80 \cdot x \cdot b \cdot f_{cd} + A'_s \cdot f_{yd} - A_s \cdot f_{yd} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{[A_s - A'_s] \cdot f_{yd}}{0.80 \cdot b \cdot f_{cd}}$$

- Si controlla la deformazione dell'armatura compressa:

$$\varepsilon'_s = \frac{x - d'}{x} \cdot \varepsilon_{cu}$$

- Se $\varepsilon'_s \ge \varepsilon_{yd}$ l'armatura è effettivamente snervata pertanto è possibile procedere con il calcolo del momento resistente.

$$\boxed{M_{Rd} = 0.80 \cdot x \cdot b \cdot f_{cd} \cdot [d - 0.4 \cdot x] + A'_s \cdot f_{yd} \cdot [d - d']}$$

- Se $\varepsilon'_s < \varepsilon_{yd}$ l'armatura è non è snervata pertanto è necessario imporre nuovamente la condizione di equilibrio:

$$0.80 \cdot x \cdot b \cdot f_{cd} + A'_s \cdot E_s \cdot \left[\frac{x - d'}{x} \cdot \varepsilon_{cu}\right] - A_s \cdot f_{yd} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x \qquad \Rightarrow \qquad \varepsilon'_s$$

$$\boxed{M_{Rd} = 0.80 \cdot x \cdot b \cdot f_{cd} \cdot [d - 0.4 \cdot x] + A'_s \cdot E_s \cdot \varepsilon'_s \cdot [d - d']}$$

Esempio

Calcolare il momento resistente di una sezione 30 x 50 (cm) ordita con 4Φ16 superiori e 4Φ26 inferiori. Si assumano 3 (cm) di copriferro, una classe del calcestruzzo C25/30 e armature in acciaio Feb44k/s:

Armatura superiore: $A_s' = 4 \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} = 4 \cdot \frac{\pi \cdot 16^2}{4} = 804$ (mm²)

Armatura inferiore: $A_s = 4 \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} = 4 \cdot \frac{\pi \cdot 26^2}{4} = 2124$ (mm²)

Resistenza di calcolo del calcestruzzo: $f_{cd} = \frac{0.85 \cdot 0.83 \cdot R_{ck}}{1.6} = \frac{0.85 \cdot 0.83 \cdot 30}{1.6} = 13.23$ (MPa)

Resistenza di calcolo delle armature: $f_{yd} = \frac{430}{1.15} = 373.9$ (MPa)

Percentuale meccanica d'armatura: $\omega_s = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{b \cdot d \cdot f_{cd}} = \frac{1810 \cdot 373.9}{300 \cdot (500-30) \cdot 13.23} = 0.3628$ (-)

$$\begin{cases} \omega_{2b} = \dfrac{0.2099}{1-\alpha_s' \cdot \rho} = \dfrac{0.2099}{1-\dfrac{804}{2124}} = 0.0.337 \\ \alpha_s' = \min\left[\dfrac{\xi_{2b}-\delta}{1-\xi_{2b}} \cdot \dfrac{\varepsilon_{su}}{\varepsilon_{yd}};1\right] = \min\left[\dfrac{0.2593-\dfrac{30}{500-30}}{1-0.2593} \cdot \dfrac{0.01}{\dfrac{373.9}{206000}};1\right] = 1 \end{cases}$$

Visto che $\omega_s > \omega_{2b}$ la sezione si rompe in campo 3.

$$0.80 \cdot x \cdot b \cdot f_{cd} + A_s' \cdot f_{yd} - A_s \cdot f_{yd} = 0$$
$$0.80 \cdot x \cdot 300 \cdot 13.23 + 804 \cdot 373.9 - 2124 \cdot 373.9 = 0$$

L'asse neutro risulta pertanto: $x = \frac{[2124-804] \cdot 373.9}{0.80 \cdot 300 \cdot 13.23} = 155$

La deformazione dell'armatura compressa: $\varepsilon_s' = \frac{x-d'}{x} \cdot \varepsilon_{cu} = \frac{155-30}{155} \cdot 0.0035 = 0.00282 > \frac{f_{yd}}{E_s} = \frac{373.9}{206000} = 0.001815$

Poiché l'armatura compressa risulta snervata la posizione dell'asse neutro è corretta e per tanto si può procedere al calcolo del momento resistente della sezione:

$$M_{Rd} = 0.80 \cdot x \cdot b \cdot f_{cd} \cdot [d - 0.4 \cdot x] + A_s' \cdot f_{yd} \cdot [d - d']$$

$$M_{Rd} = \frac{0.80 \cdot 155 \cdot 300 \cdot 13.23 \cdot [470 - 0.4 \cdot 155] + 804 \cdot 373.9 \cdot [470-30]}{10^6} = 333$$ (kNm)