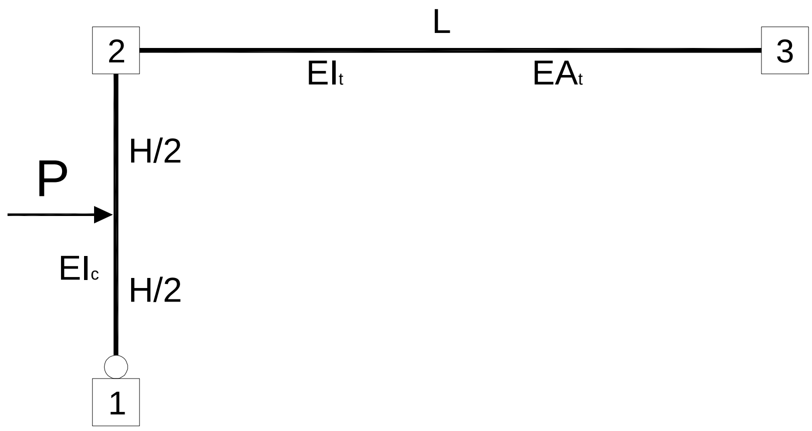
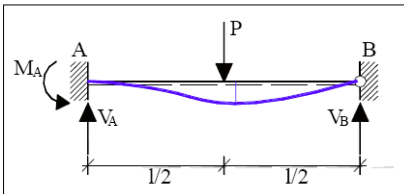
ESEMPIO DI CALCOLO DI UN TELAIO IPERSTATICO SOGGETTO AD UNA FORZA ORIZZONTALE CONCENTRATA CON IL METODO DEGLI SPOSTAMENTI

(Redattore: Dott. Ing. Simone Caffè – 27 Agosto 2008)



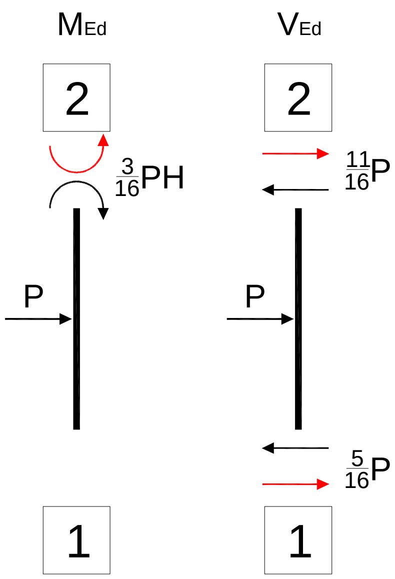
Sistema "zero" a nodi fissi

Nel sistema a nodi fissi, si analizza la colonna soggetta alla forza orizzontale di intensità "P" come se fosse incernierata nel nodo "1" e perfettamente incastrata nel nodo "2". Le caratteristiche di sollecitazione derivanti da questa configurazione risultano:



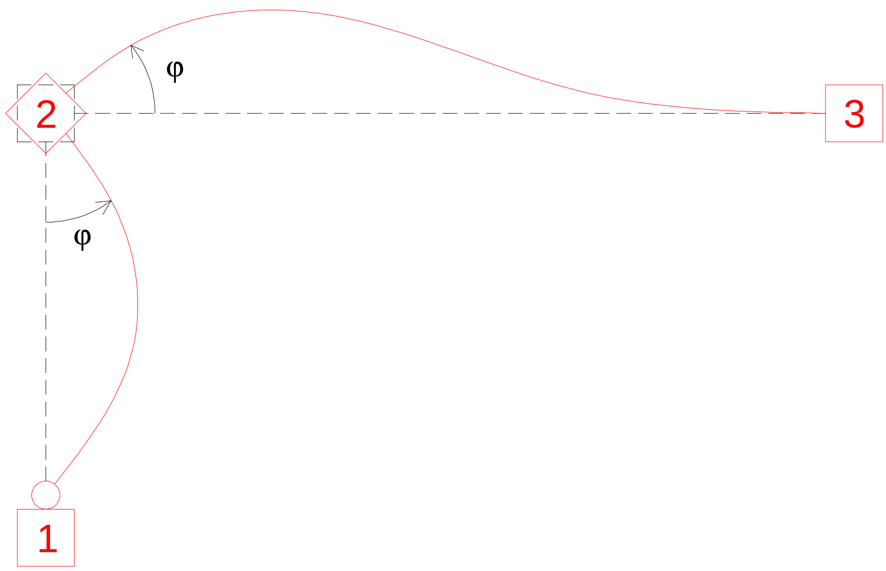
$$V_A = \frac{11}{16}P\,;\; V_B = \frac{5}{16}P$$

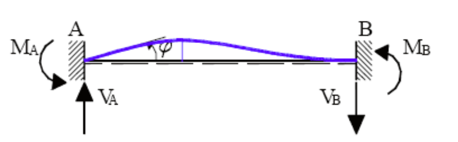
$$M_A = \frac{3}{16}Pl$$



<u>Sistema “uno” a nodi spostabili: - Rotazione del nodo “2”</u>

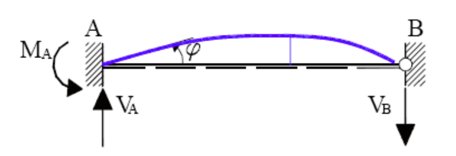
Si impone una rotazione antioraria “φ” al nodo “2”, e si determinano le caratteristiche di sollecitazione che tale distorsione provoca negli elementi convergenti nel nodo:





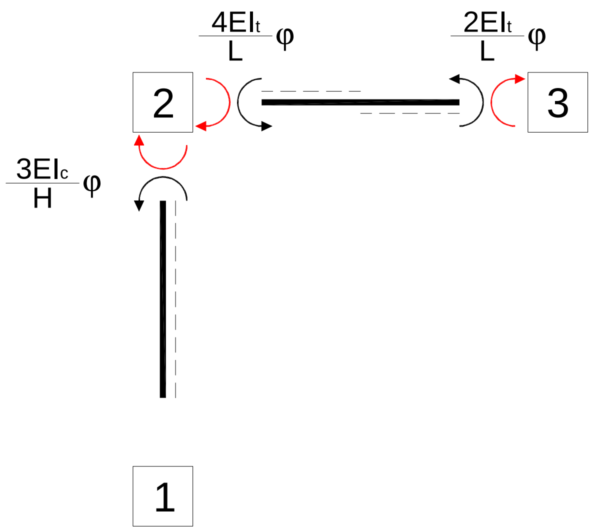
$$V_A = -V_B = \frac{6\varphi EJ}{l^2}$$

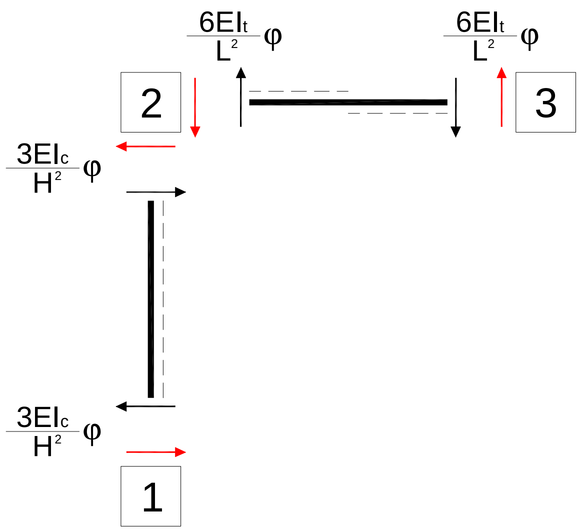
$$M_A = \frac{4\varphi EJ}{l}\,;\quad M_B = \frac{2\varphi EJ}{l}$$



$$V_A = -V_B = \frac{3\varphi EJ}{l^2}$$

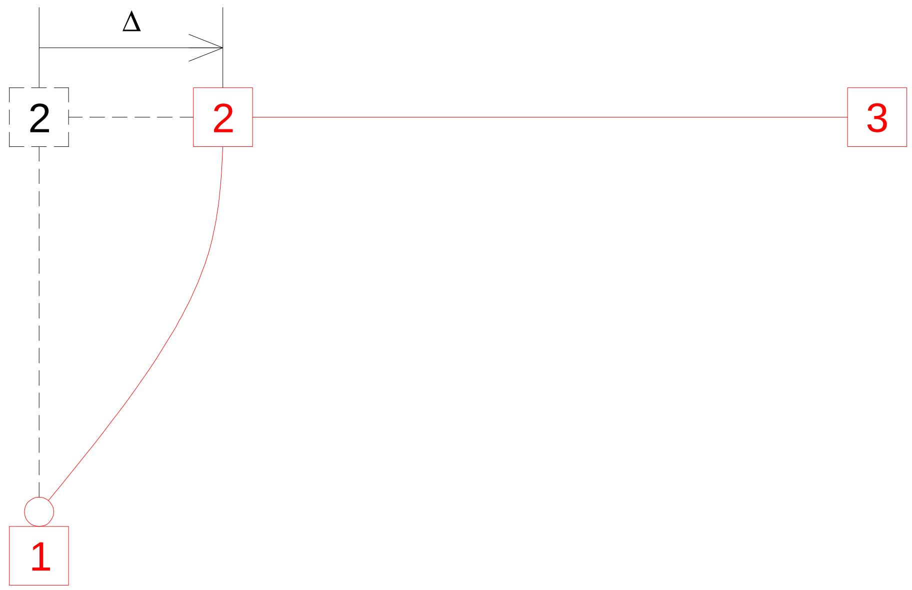
$$M_A = \frac{3\varphi EJ}{l}$$

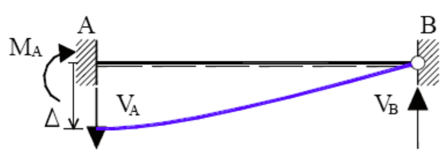




<u>Sistema "due" a nodi spostabili: - Traslazione orizzontale del nodo "2"</u>

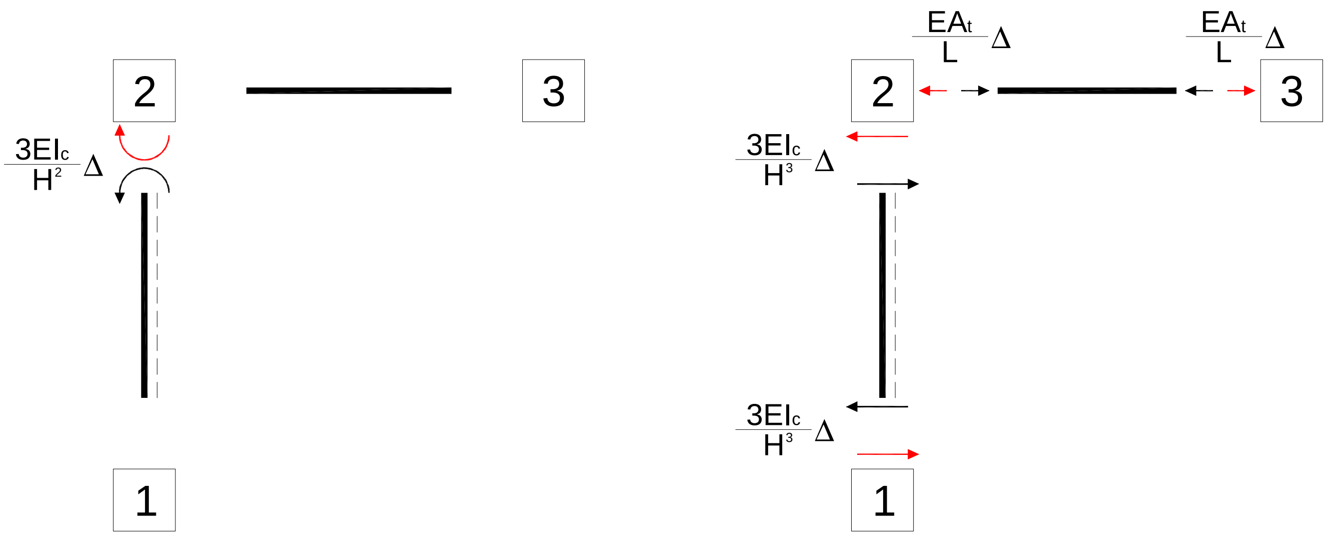
Si impone una traslazione orizzontale "Δ" al nodo "2", e si determinano le caratteristiche di sollecitazione che tale distorsione provoca negli elementi convergenti nel nodo:



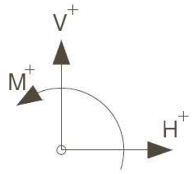


$$V_A = -V_B = \frac{3\Delta EJ}{l^3}$$

$$M_A = \frac{3\Delta EJ}{l^2}$$



Risoluzione del sistema :
Si costruisce il sistema a due equazioni in due incognite "φ" e "Δ", imponendo l'equilibrio delle forze agenti sul nodo "2" di cui sono appunto incogniti gli spostamenti. Il verso positivo del momento agente nel nodo è "Antiorario", mentre il verso positivo della forza orizzontale è assunto "da sinistra verso destra":



$$\begin{cases} M_{nodo} = M_o + \sum_i M_{ik} \cdot \delta_i \\ F_{nodo} = F_o + \sum_i F_{ik} \cdot \delta_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = \frac{3}{16} \cdot P \cdot H - \frac{4 \cdot E \cdot I_t}{L} \cdot \varphi - \frac{3 \cdot E \cdot I_c}{H} \cdot \varphi - \frac{3 \cdot E \cdot I_c}{H^2} \cdot \Delta \\ 0 = \frac{11}{16} \cdot P - \frac{3 \cdot E \cdot I_c}{H^2} \cdot \varphi - \frac{3 \cdot E \cdot I_c}{H^3} \cdot \Delta - \frac{E \cdot A_t}{L} \cdot \Delta \end{cases}$$

Esempio pratico:

	Modulo elastico	Area della sezione	Momento d'inerzia	Dimensioni
Colonna	E=25000000 [kN/m^2]	A_c=0.4^2=0.16 [m^2]	I_c=0.4^4/12=0.00213 [m^4]	H=5.00 [m]
Trave	E=25000000 [kN/m^2]	A_t=0.6·0.2=0.12 [m^2]	I_t=0.2·0.6^3/12=0.0036 [m^4]	L=10.0 [m]

Il carico "P" è stato assunto pari a 500 [kN]

Sostituendo i valori nel sistema precedente si ottengono gli spostamenti incogniti del nodo "2":

$$\begin{cases} 0 = 468.75 - 36000 \cdot \varphi - 32000 \cdot \varphi - 6400 \cdot \Delta \\ 0 = 343.75 - 6400 \cdot \varphi - 1280 \cdot \Delta - 300000 \cdot \Delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = 0.0068[rad] \\ \Delta = 0.000996[m] \end{cases}$$

Determinazione dei momenti agenti sui nodi:

Nodo 1:
$M_1 = 0$

Nodo 2 (lato colonna):

$$M_{1-2} = \frac{3}{16} \cdot P \cdot H - \frac{3 \cdot E \cdot I_c}{H} \cdot \varphi - \frac{3 \cdot E \cdot I_c}{H^2} \cdot \Delta$$

$$M_{1-2} = 468.75 - 217.60 - 6.37 = 244.77$$

[kNm]

Il segno del momento è positivo pertanto il verso sul nodo è antiorario come da convenzione.

Nodo 2 (lato trave):

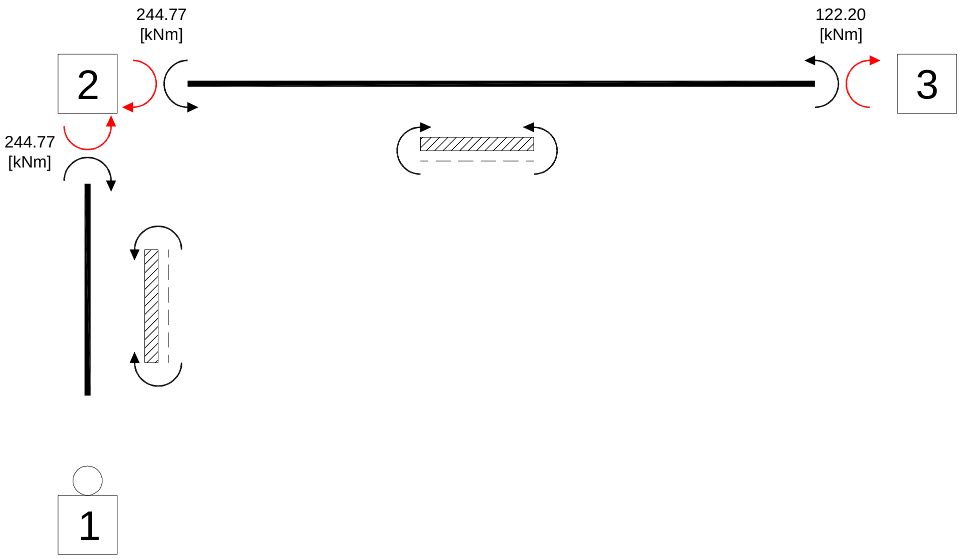
$$M_{2-3} = -\frac{4 \cdot E \cdot I_t}{L} \cdot \varphi \qquad M_{2-3} = -244.77$$ [kNm]

Il segno del momento è negativo pertanto il verso sul nodo è orario.

Nodo 3:

$$M_3 = -\frac{2 \cdot E \cdot I_t}{L} \cdot \varphi \qquad M_3 = -122.20 \qquad \text{[kNm]}$$

Il segno del momento è negativo pertanto il verso sul nodo è orario.



Determinazione delle forze agenti sui nodi:

Nodo 1:

$$V_1 = \frac{5}{16} \cdot P + \frac{3 \cdot E \cdot I_c}{H^2} \cdot \varphi + \frac{3 \cdot E \cdot I_c}{H^3} \cdot \Delta$$

$$V_1 = 156.25 + 43.52 + 1.275 = 201 \qquad \text{[kN]}$$

Il segno della forza è positivo per tanto la direzione della forza agente sul nodo è da sinistra verso destra come da convenzione.

Nodo 2 (lato colonna):

$$V_{1-2} = \frac{11}{16} \cdot P - \frac{3 \cdot E \cdot I_c}{H^2} \cdot \varphi - \frac{3 \cdot E \cdot I_c}{H^3} \cdot \Delta$$

$$V_{1-2} = 343.75 - 43.52 - 1.275 = 298.96 \qquad \text{[kN]}$$

Il segno della forza è positivo per tanto la direzione della forza agente sul nodo è da sinistra verso destra come da convenzione.

Nodo 2 (lato trave):

$$V_{2-3} = -\frac{6 \cdot E \cdot I_t}{L^2} \cdot \varphi$$

$$V_{2-3} = -36.72 \qquad \text{[kN]}$$

Il segno della forza è negativo per tanto la direzione della forza agente sul nodo è dall’alto verso il basso.

Nodo 3:

$$V_3 = \frac{6 \cdot E \cdot I_t}{L^2} \cdot \varphi$$

$$V_3 = 36.72 \qquad \text{[kN]}$$

Il segno della forza è positivo per tanto la direzione della forza agente sul nodo è dal basso verso l'alto come da convenzione.

Forza assiale sulla trave:

$$N_{2-3} = -\frac{E \cdot A_t}{L} \cdot \Delta = -298.80 \qquad \text{[kN]}$$

Forza assiale sulla colonna:

$$N_{2-1} = -\frac{6 \cdot E \cdot I_t}{L^2} \cdot \varphi = -36.72 \qquad \text{[kN]}$$

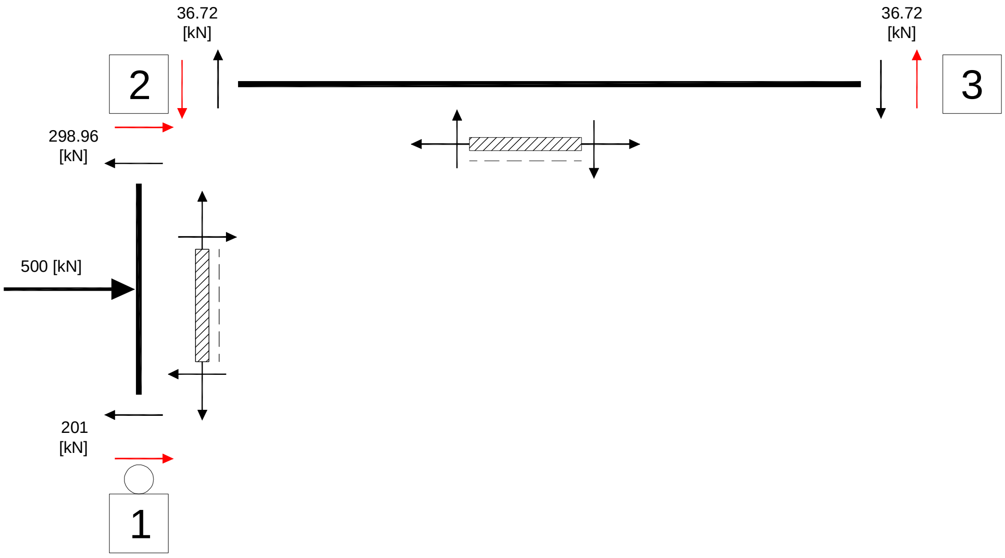


Diagramma della forza Normale:

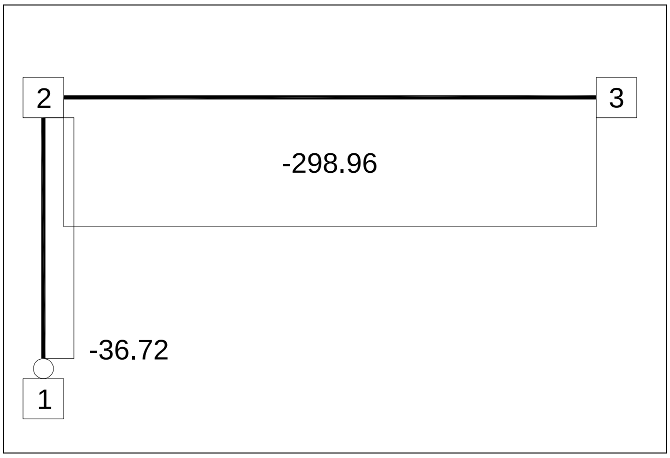


Diagramma della forza di Taglio:

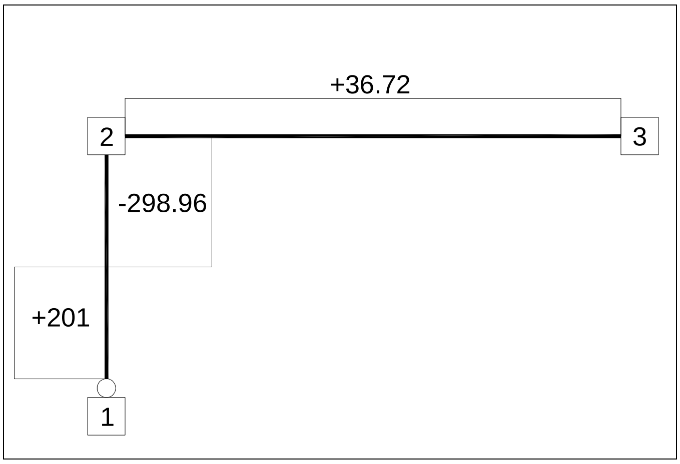


Diagramma del Momento flettente: