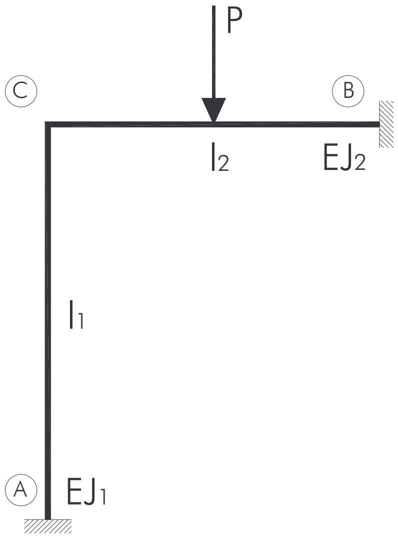
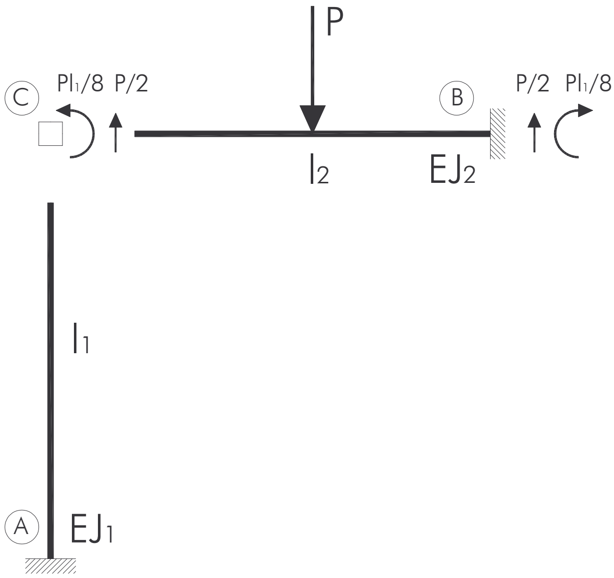
# SOLUZIONE DI UN TELAIO IPERSTATICO

## METODO DEGLI SPOSTAMENTI



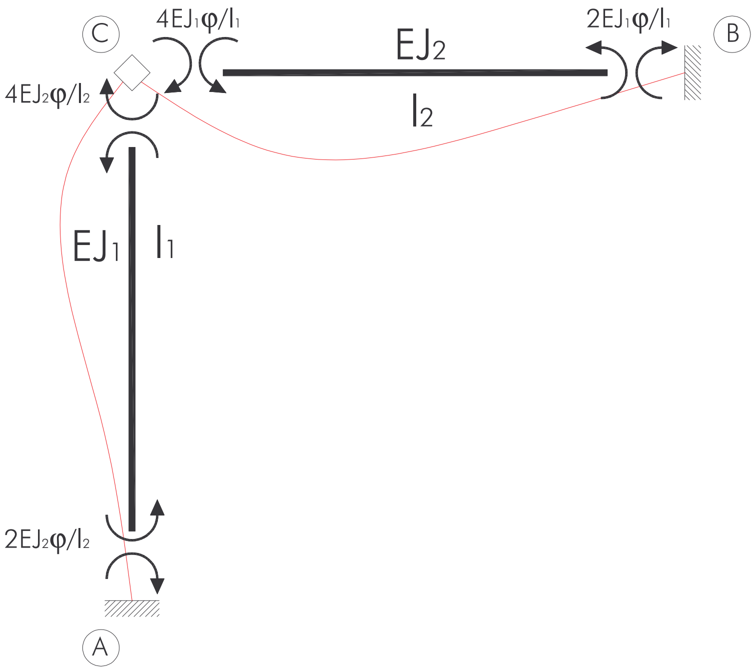

Il telaio risulta una volta iperstatico poiché l'unica incognita è la rotazione $\varphi_C$ del nodo C.

Il primo passo per la soluzione del problema iperstatico è quella di ipotizzare il nodo C rigido (sistema a nodi bloccati), ovvero incapace di ruotare, e in tale ipostesi valutare le reazioni indotte dai carichi esterni:




$$\begin{cases} M_C^{[1]} = \dfrac{P \cdot l_1}{8} \\ V_C^{[1]} = \dfrac{P}{2} \end{cases}$$

Il secondo passo è quello di imporre delle rotazioni al nodo C (sistema a nodi sbloccati privato dei carichi esterni) e di valutare le reazioni indotte da tale spostamento.



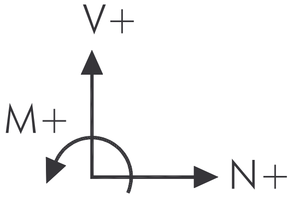

A questo punto si impone l'equilibrio del nodo C secondo la seguente equazione:

$$\mu_0 = \mu_1 + \mu_{11} \cdot \varphi_1$$

Dove:

- $\mu_0$ Momento esterno nodale
- $\mu_1$ Risultante dei momenti nel sistema a nodi bloccati
- $\mu_{11}$ Risultante dei momenti nel sistema a nodi sbloccati
- $\varphi$ Rotazione incognita

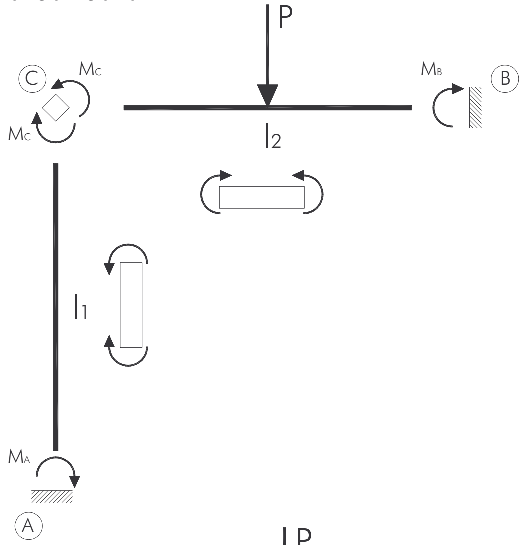
La convenzione dei segni è la seguente:

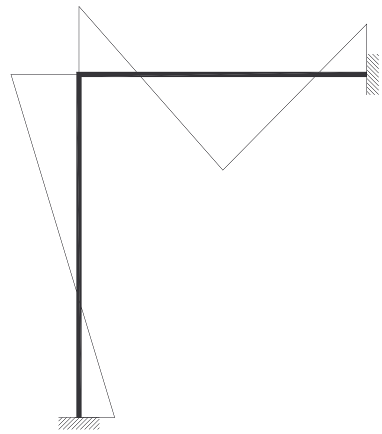


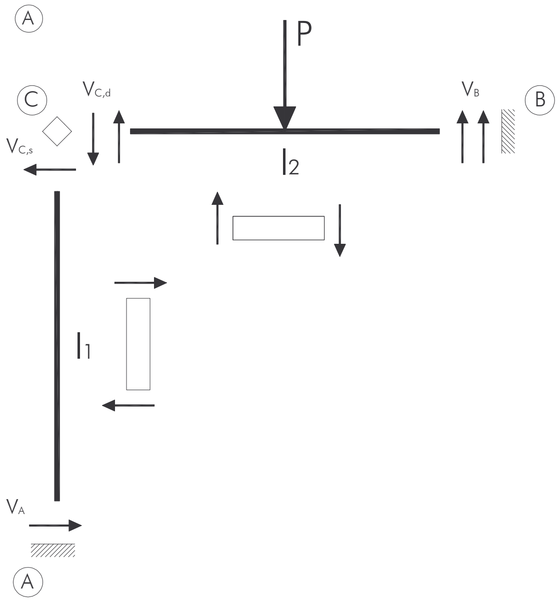

$$\begin{cases} 0 = M_C^{[1]} + M_C^{[11]} \cdot \varphi_C \\ 0 = \dfrac{P \cdot l_1}{8} - \left[ \dfrac{4 \cdot E \cdot J_1}{l_1} + \dfrac{4 \cdot E \cdot J_2}{l_2} \right] \cdot \varphi_C \end{cases} \quad \rightarrow \quad \varphi_C = \frac{P \cdot l_1^2 \cdot l_2}{32 \cdot E \cdot (J_1 \cdot l_2 + J_2 \cdot l_1)} = C$$

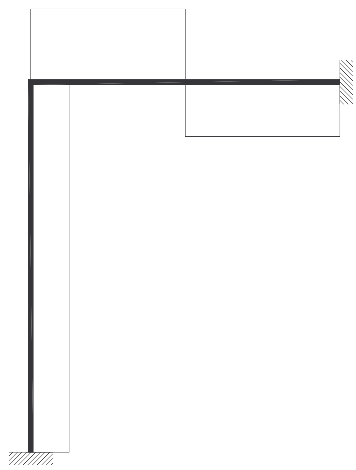
Poiché $\varphi_C$ è positivo la rotazione attribuita inizialmente al sistema a nodi sbloccati è congruente con il sistema equilibrato.

Una volta determinato il valore della rotazione $\varphi_C = C$ è possibile valutare tutte le caratteristiche di sollecitazione insistenti sul telaio.
La convenzione dei segni va tenuta in conto solamente nel caso in cui i versi della sollecitazione i-esima nel sistema a nodi bloccati e in quello a nodi sbloccati non siano concordi.





$$M_A = \frac{2 \cdot E \cdot J_2}{l_2} \cdot C$$ Segni concordi

$$M_{C-A} = \frac{4 \cdot E \cdot J_2}{l_2} \cdot C$$ Segni concordi

$$M_{C-B} = \frac{P \cdot l_1}{8} - \frac{4 \cdot E \cdot J_1}{l_1} \cdot C$$ Segni discordi, si guarda la convenzione

$$M_B = \frac{P \cdot l_1}{8} + \frac{2 \cdot E \cdot J_1}{l_1} \cdot C$$ Segni concordi

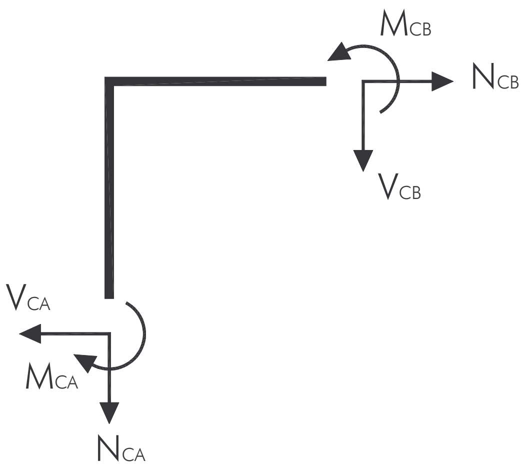
$V_A = \frac{6 \cdot E \cdot J_2}{l_2^2} \cdot C$ Segni concordi

$V_{C-s} = \frac{6 \cdot E \cdot J_2}{l_2^2} \cdot C$ Segni concordi

$V_{C-d} = \frac{P}{2} - \frac{6 \cdot E \cdot J_1}{l_1^2} \cdot C$ Segni discordi, si guarda la convenzione

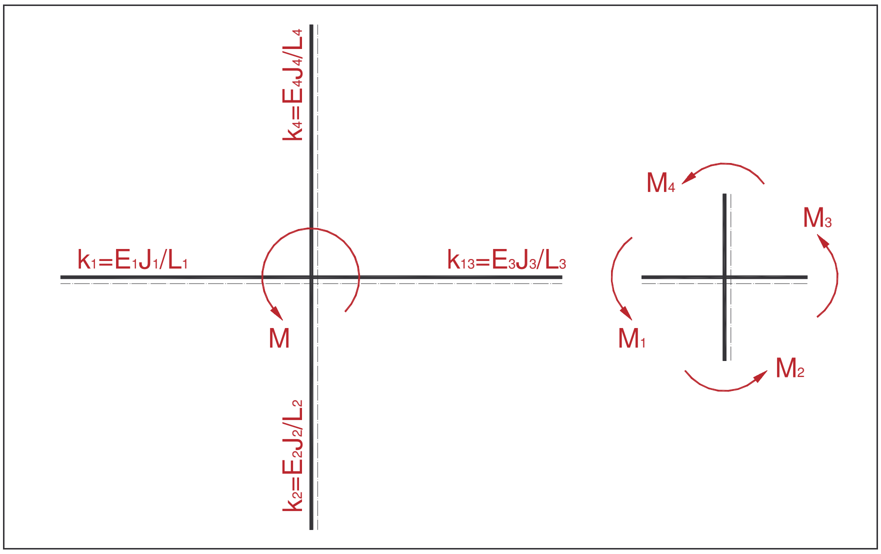
$V_B = \frac{P}{2} + \frac{6 \cdot E \cdot J_1}{l_1^2} \cdot C$ Segni concordi

Per determinare le reazioni normali $N_{A-C}$ e $N_{B-C}$ si deve imporre l'equilibrio del nodo con le convenzioni di De Saint Venant.




$$\begin{cases} V_{C-A} - N_{C-B} = 0 \\ N_{C-A} + V_{C-B} = 0 \\ M_{C-A} - M_{C-B} = 0 \end{cases}$$

# RIPARTIZIONE DELLE AZIONI NODALI




$$M : \sum_i k_i = M_j : k_j \qquad \boxed{M_j = \frac{M \cdot k_j}{\sum_i k_i}}$$

## Esempio 1

$$E_1 J_1 = E_2 J_2 = E_3 J_3 = E_4 J_4 = EJ$$

$$l_1 = l$$
$$l_2 = 2l$$
$$l_3 = 3l$$
$$l_4 = 4l$$

$$k_1 = \frac{EJ}{l} \qquad k_2 = \frac{EJ}{2l} \qquad k_3 = \frac{EJ}{3l} \qquad k_4 = \frac{EJ}{4l} \quad \Rightarrow$$

$$M_1 = \frac{M \cdot \frac{EJ}{l}}{\frac{EJ}{l} + \frac{EJ}{2l} + \frac{EJ}{3l} + \frac{EJ}{4l}} = \frac{24}{50} \cdot M$$

$$M_2 = \frac{M \cdot \frac{EJ}{2l}}{\frac{EJ}{l} + \frac{EJ}{2l} + \frac{EJ}{3l} + \frac{EJ}{4l}} = \frac{24}{100} \cdot M$$

$$M_3 = \frac{M \cdot \frac{EJ}{3l}}{\frac{EJ}{l} + \frac{EJ}{2l} + \frac{EJ}{3l} + \frac{EJ}{4l}} = \frac{24}{150} \cdot M$$

$$M_4 = \frac{M \cdot \frac{EJ}{4l}}{\frac{EJ}{l} + \frac{EJ}{2l} + \frac{EJ}{3l} + \frac{EJ}{4l}} = \frac{24}{200} \cdot M$$

## Esempio 2

$$E_1 J_1 = EJ$$
$$E_2 J_2 = 2EJ$$
$$E_3 J_3 = 3EJ$$
$$E_4 J_4 = 4EJ$$

$$l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l$$

$$k_1 = \frac{EJ}{l}$$
$$k_2 = \frac{2EJ}{l}$$
$$k_3 = \frac{3EJ}{l}$$
$$k_4 = \frac{4EJ}{l}$$

$$M_1 = \frac{M \cdot \frac{EJ}{l}}{\frac{EJ}{l} + \frac{2EJ}{l} + \frac{3EJ}{l} + \frac{4EJ}{l}} = \frac{M}{10}$$

$$M_2 = \frac{M \cdot \frac{2EJ}{l}}{\frac{EJ}{l} + \frac{2EJ}{l} + \frac{3EJ}{l} + \frac{4EJ}{l}} = \frac{M}{5}$$

$$M_3 = \frac{M \cdot \frac{3EJ}{l}}{\frac{EJ}{l} + \frac{2EJ}{l} + \frac{3EJ}{l} + \frac{4EJ}{l}} = \frac{3}{10} M$$

$$M_4 = \frac{M \cdot \frac{4EJ}{l}}{\frac{EJ}{l} + \frac{2EJ}{l} + \frac{3EJ}{l} + \frac{4EJ}{l}} = \frac{4}{10} M$$