Dott. Ing. Simone Caffè

e-mail: netcoffee@tin.it

RIEPILOGO DI SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

1. MODELLAZIONE DELLA STRUTTURA

La fase più importante nello studio delle strutture è quella di riuscire a "modellare" il comportamento reale e la geometria reale del sistema strutturale da analizzare con un opportuno "schema statico" che sarà oggetto di tutte le considerazioni statico deformative, che porteranno alla verifica o meno dello stesso.

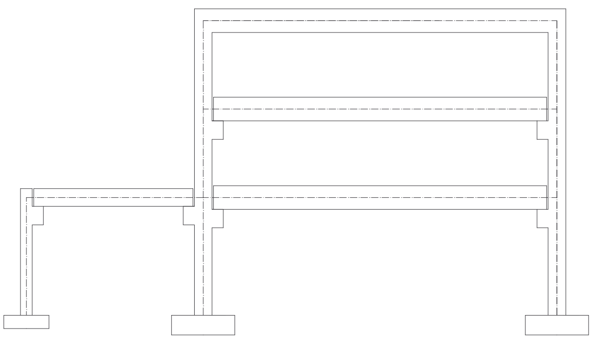
1.1. *Modellazione geometrica*

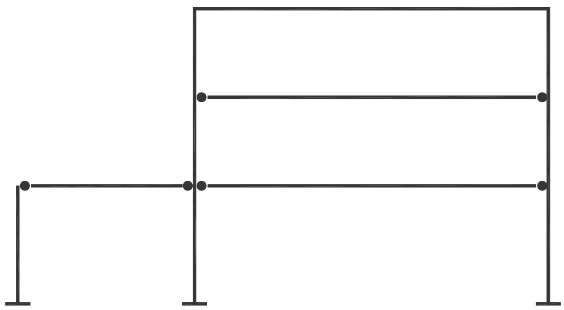
La modellazione geometrica è quel processo che serve a trasformare l'oggetto reale da studiare in un sistema di "elementi" da introdurre nel calcolo:

1.1.1. *Modellazione monodimensionale*

Moltissime strutture reali, come per esempio gli edifici in calcestruzzo armato, o le coperture reticolari dei capannoni industriali, o gli edifici prefabbricati possono essere modellati semplicemente come un insieme di "aste" o di "travi" o di "colonne" semplici o accoppiate che formano il sistema strutturale da analizzare.

Nel caso di elementi "monodimensionali" ovvero elementi nei quali una dimensione prevarica sulle altre due (es. travi, colonne) la modellazione avviene assumendo nel calcolo "l'asse baricentrico" dell'elemento reale:





1.1.2. *Modellazione bidimensionale*

Gli elementi strutturali come i solai, le piastre o le lastre, posseggono due dimensioni prevaricanti sulla terza, per tale ragione la modellazione avviene attraverso il loro piano medio.

1.1.3. *Modellazione tridimensionale*

Infine gli elementi come i plinti di fondazione i muri di sostegno o le mensole tozze non hanno nessuna dimensione prevaricante sulle altre, per tale ragione vengono generalmente studiati come elementi tridimensionali rigidi.

2. MODELLAZIONE DEI VINCOLI ESTERNI

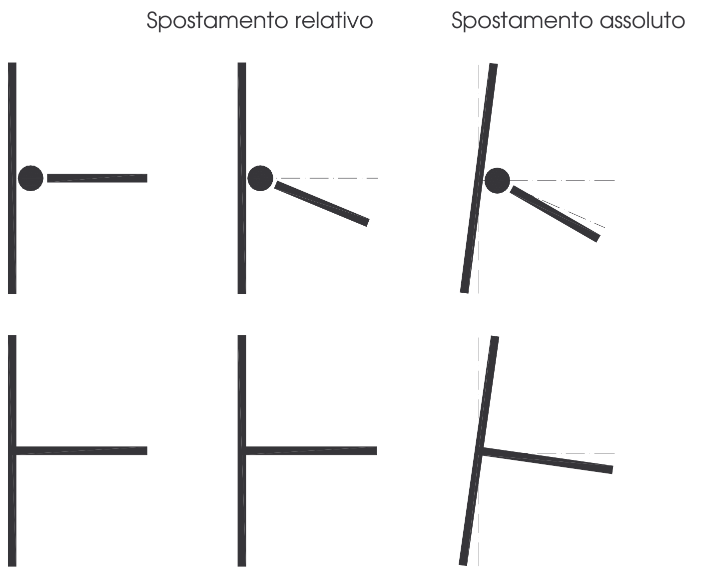
Le strutture reali sono vincolate a terra in modo da trasferire al terreno, attraverso vari sistemi di fondazione, i carichi per le quali sono state dimensionate.
Nella pratica della scienza delle costruzioni questi sistemi di fondazione vengono modellati attraverso dei vincoli che permettono o meno traslazioni e rotazioni.

Tipo di vincolo	Spostamenti impediti	Spostamenti trasmessi	Reazioni
Carrello semplice	$u_2 = 0$	$u_1 \neq 0$; $\varphi_3 \neq 0$	$R_2 \neq 0$
Cerniera	$u_1 = 0$; $u_2 = 0$	$\varphi_3 \neq 0$	$R_1 \neq 0$; $R_2 \neq 0$
Doppio pendolo	$u_2 = 0$; $\varphi_3 = 0$	$u_1 \neq 0$	$R_2 \neq 0$; $M_3 \neq 0$
Incastro	$u_1 = 0$; $u_2 = 0$; $\varphi_3 = 0$	-	$R_1 \neq 0$; $R_2 \neq 0$; $M_3 \neq 0$

3. SVINCOLI INTERNI

Gli svincoli interni alla struttura sono delle connessioni tra gli elementi che permettono o meno la trasmissione di determinate caratteristiche di sollecitazione. Per esempio lo svincolo a "cerniera" che è in assoluto quello più comune, permette la trasmissione da un elemento a quello connesso della forza normale e del taglio, ma non del momento flettente, ne segue che nella cerniera l'unico spostamento relativo consentito è la rotazione. Viceversa la connessione rigida tra due elementi, consente la trasmissione integrale delle caratteristiche di sollecitazione poiché ivi tutti gli spostamenti relativi tra gli elementi collegati sono impediti.

Si sottolinea che si sta parlando di spostamenti relativi tra gli elementi collegati, e non di spostamenti assoluti, infatti nella connessione rigida un elemento rispetto ad un altro non ha movimenti, ma nel complesso il nodo può subire spostamenti.



4. GRADO DI STATICITA'

Le strutture devono essere in grado di non subire cinematismi che portino a collasso per moto rigido l'intero sistema o parte di esso.

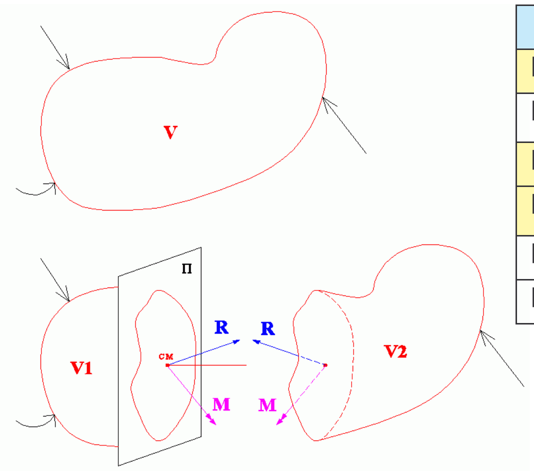
Per tale motivo si deve sempre essere in grado di valutare il "grado di staticità" della struttura analizzata, ovvero se la quantità di vincoli e la loro direzione efficace sono in grado di impedire ogni atto di moto rigido della struttura. L'atto di moto rigido è un concetto completamente diverso dalla deformazione, infatti il primo implica un tipo di spostamento che non conserva l'equilibrio generale dalla struttura, mentre il secondo rappresenta uno spostamento dell'asse baricentrico dalla configurazione iniziale a quella deformata a seguito dell'applicazione di un'azione esterna, conservando l'equilibrio generale.

Le strutture possono definirsi:

- Labili o ipostatiche: Se il numero di vincoli o la loro direzione efficace non sono in grado di impedire atti di moto rigido dell'intero sistema o di parte di esso.
- Isostatiche: Se il numero di vincoli ben posizionati è lo stretto necessario per impedire ogni atto di moto rigido nel sistema.
- Iperstatiche: Se il numero di vincoli è sovrabbondante rispetto al minimo necessario per garantire l'impedimento di ogni atto di moto rigido del sistema.

5. CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE

Le caratteristiche di sollecitazione sono delle forze o dei momenti che si distribuiscono lungo l'asse baricentrico che modella l'elemento strutturale a seguito dei carichi agenti e delle reazioni vincolari. Se ad esempio si prende una trave sottoposta ad un sistema di forze di azione (carichi) e di reazione (forze trasmesse dai vincoli) in equilibrio sotto tali azioni e si attua una sezione ideale sull'asse baricentrico ci si accorge che l'equilibrio generale non sarebbe più soddisfatto a meno che le due porzioni della sezione non si scambino delle mutue azioni in grado di equilibrare le azioni esterne. Queste azioni che le faccia di destra trasmette alla faccia di sinistra e viceversa vengono appunto definite "caratteristiche di sollecitazione":

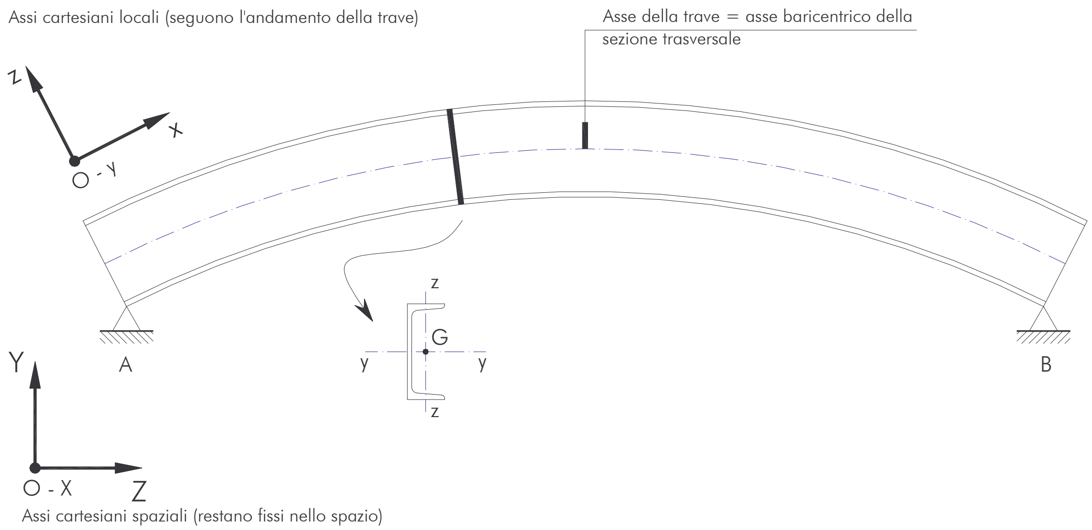


Caratteristica	Simbolo	Asse di azione
Forza normale	$N_{Sd.x}$	Lungo x
Forza di taglio	$V_{Sd.y}$	Lungo y
Forza di taglio	$V_{Sd.z}$	Lungo z
Momento flettente	$M_{Sd.y}$	Attorno a y
Momento flettente	$M_{Sd.z}$	Attorno a z
Momento torcente	$T_{Sd.x}$	Attorno a x

Le sollecitazioni evidenziate sono quelle che si studiano nella analisi piane.

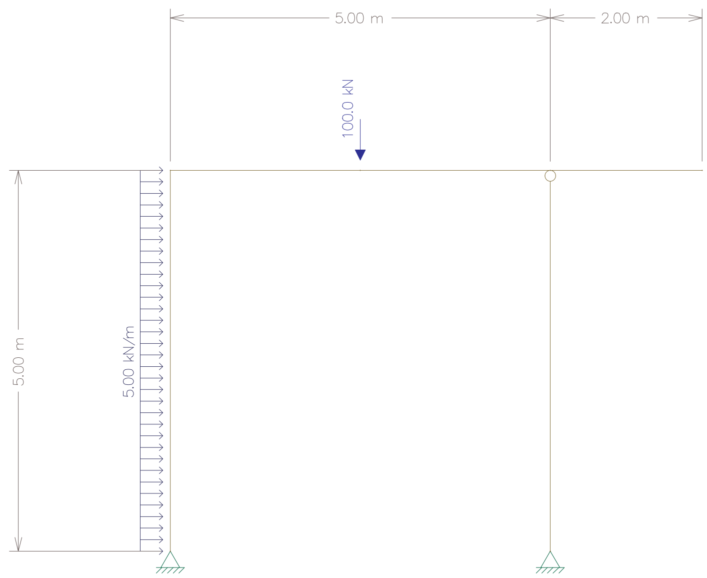
Si noti che gli assi di riferimento delle caratteristiche di sollecitazione sono conformi con quelli dei nuovi manuali sui profilati e degli Eurocodice, e si tratta di "Assi Locali" e non di assi globali.

- Gli **assi globali** sono quelli relativi ad un sistema di riferimento immobile nello spazio.
- Gli **assi locali** sono quelli che caratterizzano ogni elemento strutturale e quindi come tali si deformano insieme ad esso. L'asse parallelo all'asse baricentrico è generalmente indicato con x o con 1, differentemente dai vecchi manuali che lo identificavano con z o con 3.



6. ESEMPIO DI CALCOLO DI UN TELAIO

Di seguito si riporta l'esempio di calcolo manuale di un telaio piano:



6.1. Grado di staticità

$$v_{ext} + v_{int} = 3 \cdot n_{aste}$$

$$v_{ext} = 2 + 2 = 4$$
$$v_{int} = 3 + 2 = 5 \qquad \rightarrow \qquad \text{la struttura è isosltatica}$$
$$n_{aste} = 3$$

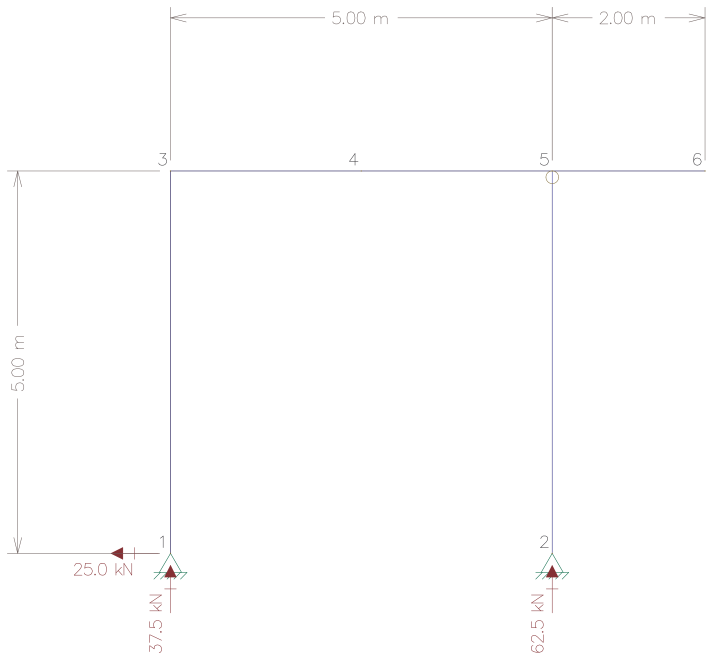
6.2. Equilibrio delle forze e dei momenti

$$\begin{cases} V_A + V_B - 100 = 0 \\ H_A + H_B + 5 \cdot 5 = 0 \\ 5 \cdot 5 \cdot 2.5 + 100 \cdot 2.5 - V_B \cdot 5 = 0 \end{cases}$$

Equazione ausiliaria attorno alla cerniera:

$$H_B \cdot 5 = 0$$

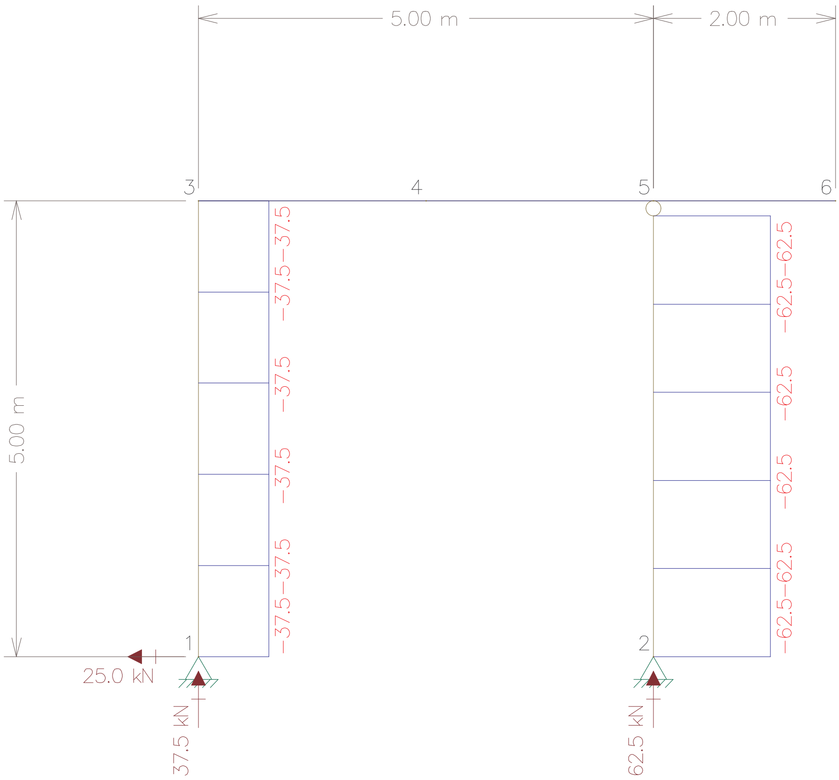
$$\begin{cases} H_A = -25 \\ H_B = 0 \\ V_A = 37.5 \\ V_B = 62.5 \end{cases}$$



6.3. Caratteristiche di sollecitazione

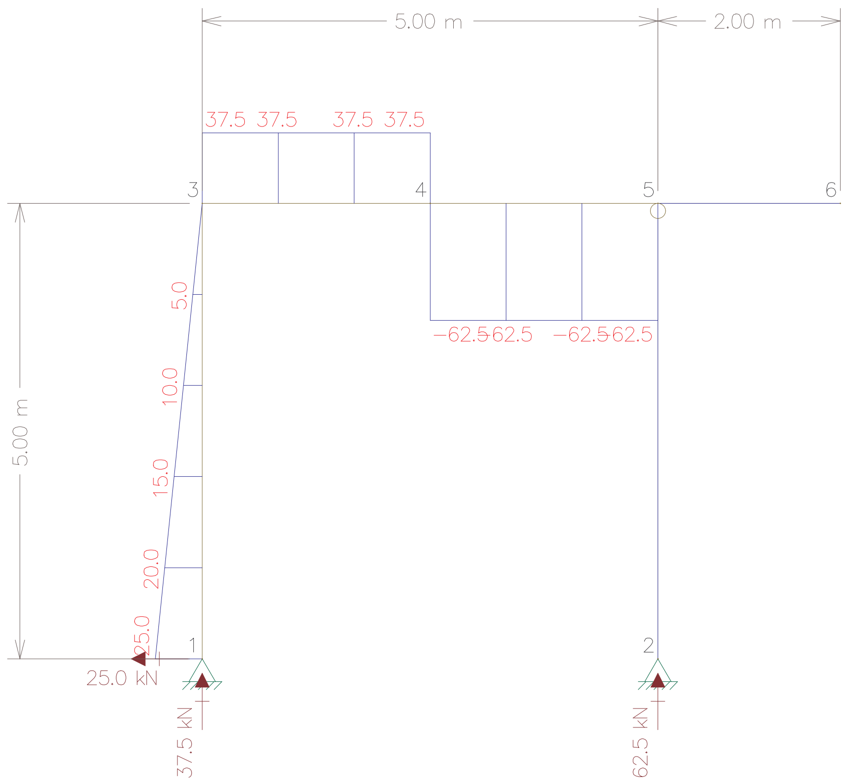
6.3.1. Forza normale

$$N_{1-3}(x) = -37.50 \qquad [kN]$$
$$N_{3-5}(x) = +25.00 - 5 \cdot 5 = 0 \qquad [kN]$$
$$N_{2-5}(x) = -62.50 \qquad [kN]$$



6.3.2. Forza di taglio

$$V_{1-3}(x) = +25 - q \cdot x = \begin{cases} V_{1-3}(x=0) = +25 \\ V_{1-3}(x=5) = +25 - 5 \cdot 5 = 0 \end{cases} \qquad [kN]$$
$$V_{3-4}(x) = +37.50 \qquad [kN]$$
$$V_{4-5}(x) = +37.50 - 100 = -62.50 \qquad [kN]$$
$$V_{5-6}(x) = 0 \qquad [kN]$$
$$V_{2-5}(x) = 0 \qquad [kN]$$



6.3.3. Momento flettente

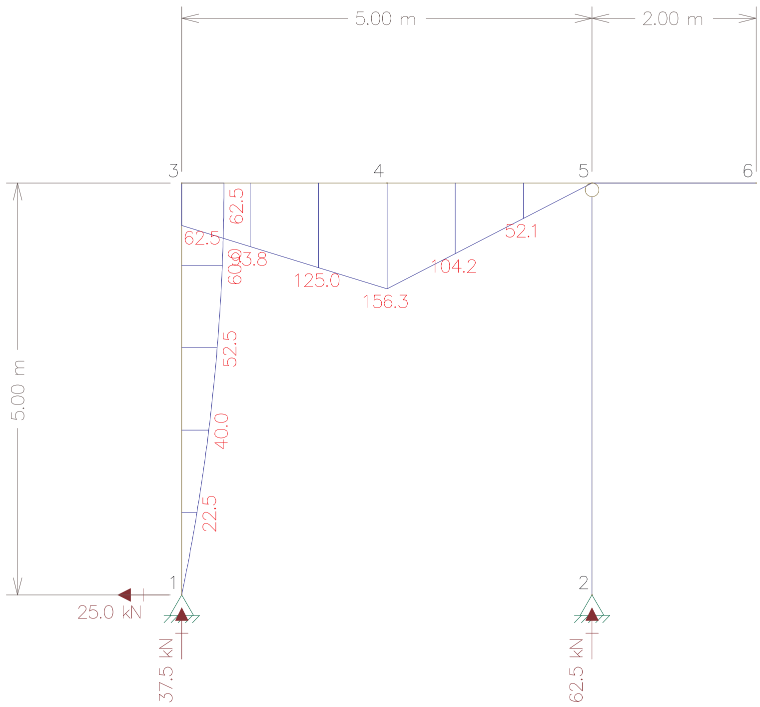
$$M_{1-3}(x) = 25 \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} = \begin{cases} M_{1-3}(x=0) = 0 \\ M_{1-3}(x=5) = 62.50 \end{cases} \qquad [kN \cdot m]$$

$$M_{3-4}(x) = 37.5 \cdot x + 25 \cdot 5 - \frac{q \cdot l^2}{2} = \begin{cases} M_{3-4}(x=0) = 62.50 \\ M_{3-4}(x=2.5) = 156.25 \end{cases} \qquad [kN \cdot m]$$

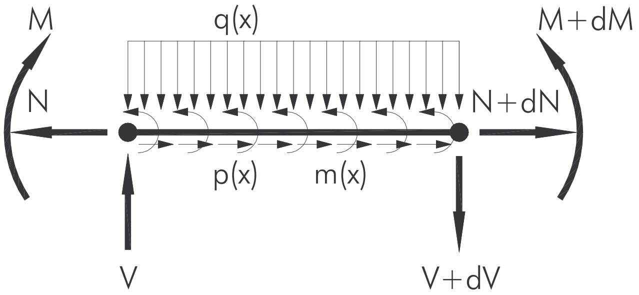
$$M_{5-4}(x) = 62.50 \cdot x = \begin{cases} M_{5-4}(x=0) = 0 \\ M_{5-4}(x=2.5) = 156.25 \end{cases} \qquad [kN \cdot m]$$

$$M_{6-5}(x) = 0 \qquad [kN \cdot m]$$

$$M_{2-5}(x) = 0 \qquad [kN \cdot m]$$



In generale si possono scrivere le equazioni indefinite dell'equilibrio, nel seguente modo:



$$N-(N+dN)-p(x)\cdot dx=0 \quad \rightarrow \quad \frac{dN(x)}{dx}+p(x)=0$$

$$V-(V+dV)-q(x)\cdot dx=0 \quad \rightarrow \quad \frac{dV(x)}{dx}+q(x)=0$$

$$M-(M+dM)+(V+dV)\cdot dx-m(x)\cdot dx+q(x)\cdot\frac{dx^2}{2}=0 \quad \rightarrow \quad \frac{dM(x)}{dx}+m(x)=V(x)$$

Se sulla struttura non sono presenti momenti applicati lungo l'asse, il taglio è la derivata della funzione del momento flettente.

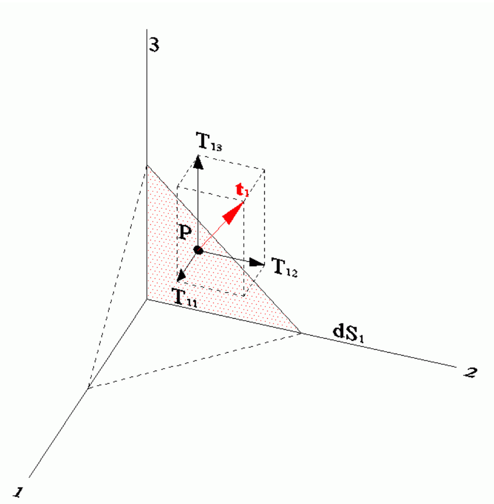
- Taglio nullo → il momento ha un massimo o un minimo
- Taglio positivo → il momento cresce
- Taglio negativo → il momento decresce
- Taglio lineare → il momento ha andamento quadratico

7. Concetto di tensione

$$\lim_{AS_n \to 0} \frac{\Delta \mathbf{R}_n}{\Delta S_n} = \mathbf{t}^{(n)} \qquad \lim_{AS_n \to 0} \frac{\Delta \mathbf{M}_n}{\Delta S_n} = 0$$

La tensione è definita come il limite per la superficie che tende a zero della forza o dei momenti su di essa agenti.

La forza agente sulla superficie si scompone in tre vettori di tensione $\mathbf{t}_i$ uno per ciascuna superficie in direzione degli assi cartesiani.
Tale vettore a sua volta ha tre componenti T_{ij} (una normale alla superficie e due tangenziali) che sono dette componenti di tensione.



Si definisce per tanto Tensore delle tensioni la matrice delle componenti dei tre vettori tensione per ciascuna direzione degli assi.

$$[\mathbf{T}]_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$ esiste una base ortonormale per cui $$[\mathbf{T}]_{ij} = [\mathbf{\Delta}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Tale tensore è doppio e simmetrico ovvero : $\mathbf{T}_{ij} = \mathbf{T}_{ji}$

Le componenti sulla diagonali sono dette tensioni normali, perché agiscono in direzione perpendicolare alla superficie.

Le componenti al di fuori della diagonale sono dette tensioni tangenziali, perché agiscono tangenzialmente alla superficie.

I materiali reagiscono bene alle tensioni normali e meno bene a quelle tangenziali.

7.1. Legame tra le caratteristiche di sollecitazione e le tensioni

Forza normale: $N_{Sd.x} = \int_A \sigma_{xx} \cdot dA$

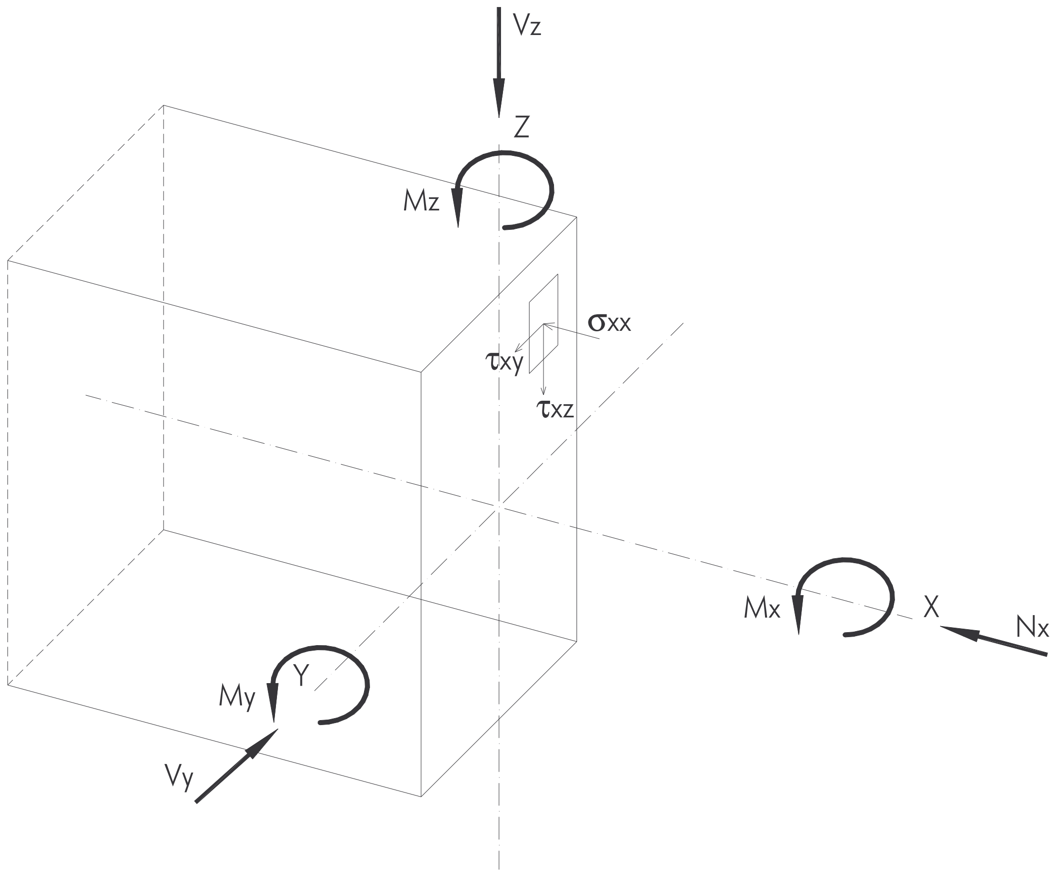
Forza di taglio: $V_{Sd.z} = \int_A \tau_{xz} \cdot dA$

$V_{Sd.y} = \int_A \tau_{xy} \cdot dA$

Momenti flettenti: $M_{Sd.y} = \int_A \sigma_{xx} \cdot z \cdot dA$

$M_{Sd.z} = \int_A \sigma_{xx} \cdot y \cdot dA$

Momento torcente: $T_{Sd.x} = \int_A (\tau_{xy} \cdot z - \tau_{xz} \cdot y) \cdot dA$



8. ANALISI DELLE SEZIONI TRASVERSALI

Tutte le seguenti considerazioni valgono se gli assi locali considerati sono baricentrici e principali d'inerzia.

8.1. Forza Normale: Trazione semplice

8.1.1. Trazione semplice in condizione elastica

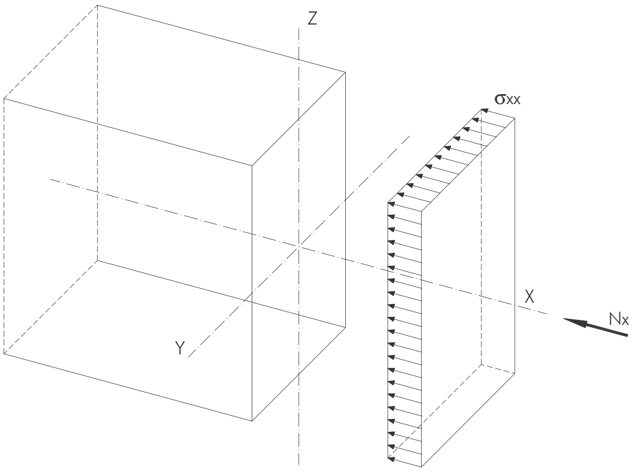
La trazione genera tensioni normali nella sezione allungandone le fibre in modo costante su tutta la sezione trasversale.

$$\sigma_{xx} = \frac{N_{Sd.x}}{A} \leq \sigma_{amm}$$

8.1.2. Trazione semplice in condizione plastica

La resistenza plastica di una sezione soggetta a trazione semplice si valuta a partire dalla resistenza del materiale allo snervamento.

$$N_{Sd} \leq N_{t.Rd} = A \cdot \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$



8.2. Forza Normale: Compressione semplice

Se si prescinde dai fenomeni di stabilità, la compressione in un materiale ideale, elastico e isotropo, è del tutto analoga alla trazione fatto salvo che le fibre dell'intera sezione si accorciano uniformemente sotto l'azione della forza esterna.

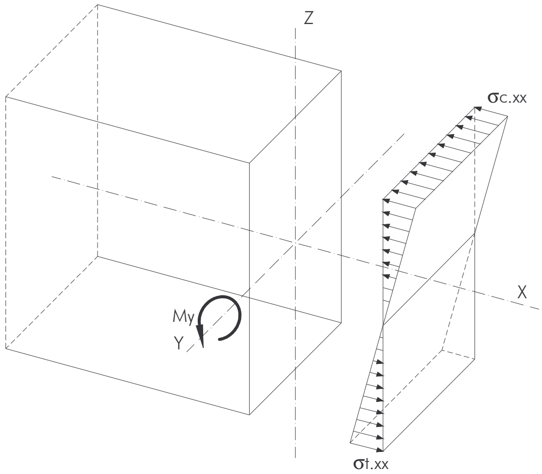
$$\sigma_{xx} = \frac{N_{Sd.x}}{A} \leq \sigma_{amm}$$

$$N_{Sd} \leq N_{c.Rd} = A \cdot \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$

8.3. Momento flettente: Flessione semplice

La flessione come la forza normale genera una stato di tensione normale nella sezione: per la precisione il momento positivo fa allungare le fibre al di sotto dell'asse neutro, mentre accorcia quelle al di sopra dell'asse neutro e viceversa il momento di segno negativo.

8.3.1. Flessione semplice in condizione elastica



$$\sigma_{c.xx} = \sigma_{t.xx} = \frac{M_{Sd.y}}{I_{yy}} \cdot z$$

$$\sigma_{xx.max} = \frac{M_{Sd.y}}{I_{yy}} \cdot \frac{h}{2} = \frac{M_{Sd.y}}{W_{el.yy}} \le \sigma_{amm}$$

andamento lineare

Dove:

I_{yy} momento d'inerzia rispetto all'asse forte y – y

$W_{el.yy}$ modulo di elasticità rispetto all'asse y – y

Per un rettangolo $I_{yy} = \frac{b \cdot h^3}{12}$ per tanto il modulo di resistenza vale $W_{el.yy} = \frac{b \cdot h^2}{6}$.

Ne consegue che la tensione massima di trazione e di compressione vale:

$\sigma_{xx.max} = \frac{6 \cdot M_{Sd.y}}{b \cdot h^2} \le \sigma_{amm}$ e il momento resistente vale: $M_{el.Rd.y} = \frac{b \cdot h^2}{6} \cdot \sigma_{amm}$

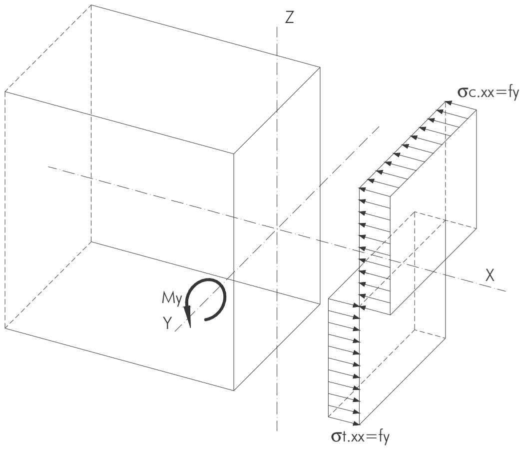
Lo stesso risultato può essere determinato considerando le risultanti di trazione e compressione applicate nei baricentri dei triangoli del diagramma di tensione:

$$N_t = N_c = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot b \cdot \sigma_{xx} = \frac{1}{4} \cdot b \cdot h \cdot \sigma_{xx}$$

$$M_{el.Rd.y} = N_t \cdot z = \left[\frac{1}{4} \cdot b \cdot h \cdot \sigma_{xx} \right] \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{h}{2} = \frac{b \cdot h^2}{6} \cdot \sigma_{amm}$$

8.3.2. *Flessione semplice in condizione plastica*

Quando le massime tensioni nelle fibre più esterne della sezione raggiungono il valore di snervamento "yeld point" $\sigma_{max.xx} = f_y$ la possibilità di un ulteriore allungamento è impedito, per cui le massime tensioni migrano allo strato subito inferiore. Il processo procede fino a quando la sezione non è interamante plasticizzata, e si forma la cosiddetta cerniera plastica ovvero una cerniera che è in grado di trasferire un momento massimo pari al momento plastico della sezione:



$$M_{Sd.y} \leq M_{pl.Rd.y} = W_{pl.yy} \cdot \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$

Dove:

$W_{pl.yy}$ modulo di plasticità rispetto all'asse y – y (pari a due volte il momento statico di mezza sezione rispetto all'asse neutro)

$$W_{pl.yy} = 2 \cdot S^*_{\text{asse neutro}}$$

Per una sezione rettangolare:

$$W_{pl.yy} = 2 \cdot \left[b \cdot \frac{h}{2} \right] \cdot \frac{h}{4} = \frac{b \cdot h^2}{4}$$

NOTA:

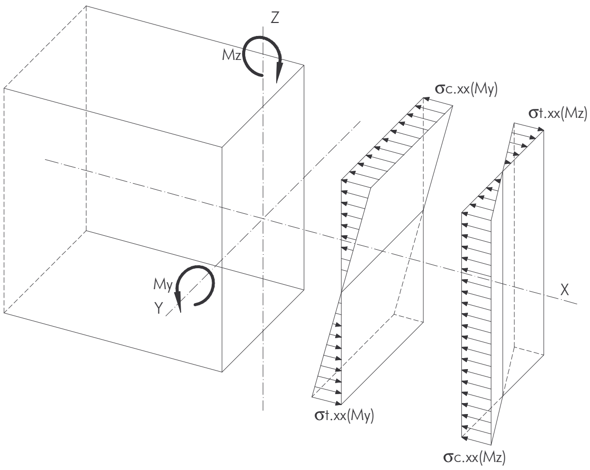
Si definisce asse neutro quel particolare asse rispetto al quale le tensioni elastiche risultano nulle. Nella flessione semplice l'asse neutro è sempre baricentrico.

8.4. Momento flettente: Flessione deviata

Una sezione è sottoposta a flessione deviata se su di essa insistono sia i momenti attorno all'asse y – y che quelli attorno all'asse z – z:

8.4.1. Flessione deviata in condizione elastica

$$\sigma_{xx.max} = \frac{M_{Sd.y}}{I_{yy}} \cdot \frac{h}{2} + \frac{M_{Sd.z}}{I_{zz}} \cdot \frac{b}{2} = \frac{M_{Sd.y}}{W_{el.yy}} + \frac{M_{Sd.z}}{W_{el.zz}} \leq \sigma_{amm}$$



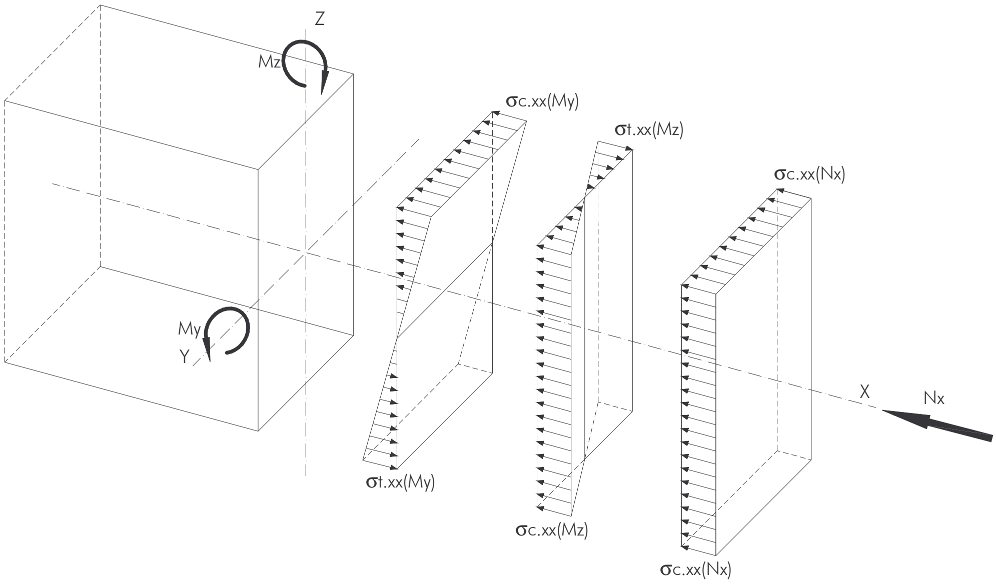
L'asse neutro passa comunque per il baricentro della sezione.

8.4.2. Flessione deviata in condizione plastica

$$\frac{M_{Sd.yy}}{\dfrac{W_{pl.yy} \cdot f_y}{\gamma_{M0}}} + \frac{M_{Sd.zz}}{\dfrac{W_{pl.zz} \cdot f_y}{\gamma_{M0}}} \leq 1$$

8.5. Presso e tenso flessione composta

Una sezione sottoposta a flessione attorno ad uno solo o ad entrambi gli assi contemporaneamente e a forza normale di compressione o di trazione si dice presso inflessa o tenso inflessa:



8.5.1. Presso o tenso flessione in condizione elastica

$$\sigma_{xx.max} = \frac{N_{Sd.x}}{A} \pm \frac{M_{Sd.y}}{I_{yy}} \cdot \frac{h}{2} \pm \frac{M_{Sd.z}}{I_{zz}} \cdot \frac{b}{2}$$

$$\sigma_{xx.max} = \frac{N_{Sd.x}}{A} \pm \frac{M_{Sd.y}}{W_{el.yy}} \pm \frac{M_{Sd.z}}{W_{el.zz}} \leq \sigma_{amm}$$

Ricordandosi il fatto che un momento può sempre essere scritto come una forza per un braccio possiamo riscrivere la precedente formula nel utilizzando solo la forza normale agente con un'eccentricità lungo y e una lungo z tali da generare gli stessi momenti $M_{Sd.z}$ e $M_{Sd.y}$.

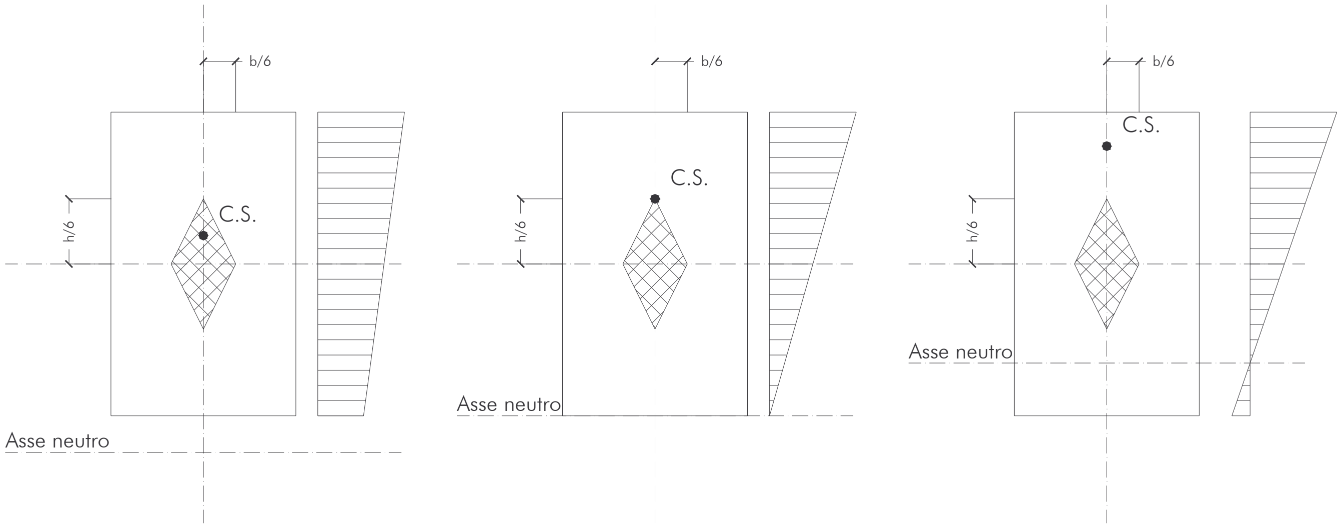
$$\sigma_{xx.max} = \frac{N_{Sd.x}}{A} \pm \frac{N_{Sd.x} \cdot e_z}{I_{yy}} \cdot z \pm \frac{N_{Sd.x} \cdot e_y}{I_{zz}} \cdot y$$

Moltiplicando e dividendo per A e ricordandosi che il raggio d'inerzia vale $i = \sqrt{I/A}$ si ottiene:

$$\sigma_{xx.max} = \frac{N_{Sd.x}}{A} \pm \frac{N_{Sd.x} \cdot e_z \cdot A}{A \cdot I_{yy}} \cdot z \pm \frac{N_{Sd.x} \cdot e_y \cdot A}{A \cdot I_{zz}} \cdot y$$

$$\sigma_{xx.max} = \frac{N_{Sd.x}}{A} \cdot \left[1 \pm \frac{e_z \cdot z}{i_{yy}^2} \pm \frac{e_y \cdot y}{i_{zz}^2} \right]$$

Si noti che in questo stato di sollecitazione l'asse neutro non passa per il baricentro ed è sempre dalla parte opposta del centro di sollecitazione, per questo è detto "antipolare".



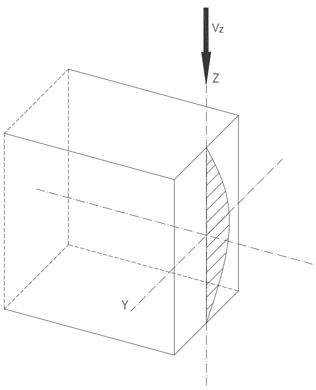
8.5.2. Presso o tenso flessione in condizione plastica

$$\frac{N_{Sd.x}}{\dfrac{A \cdot f_y}{\gamma_{M0}}} \pm \frac{M_{Sd.yy}}{\dfrac{W_{pl.yy} \cdot f_y}{\gamma_{M0}}} \pm \frac{M_{Sd.zz}}{\dfrac{W_{pl.zz} \cdot f_y}{\gamma_{M0}}} \leq 1$$

8.6. Taglio

Le sollecitazioni di taglio come quelle di torsione inducono nella sezione degli stati tensionali tangenziali, ovvero agenti nel piano della sezione trasversale e non perpendicolarmente ad essa come nel caso delle tensioni normali.
Le tensioni tangenziali dovute al taglio sono governate dall'equazione di Jourawsky :

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{V_{Sd.z} \cdot \tilde{S}_{yy}}{I_{yy} \cdot b_y} = \frac{V_{Sd.z} \cdot \tilde{A} \cdot \tilde{z}}{I_{yy} \cdot b_y} \leq \frac{\sigma_{amm}}{\sqrt{3}}$$



Dove:

$\tilde{S}_{yy}$ è il momento statico dell'area $\tilde{A}$ considerata rispetto all'asse y – y

b_y è la corda considerata

Si noti che nella sezione trasversale considerata $V_{Sd.z} = \text{cost}$, $I_{yy} = \text{cost}$, mentre $\tilde{S}_{yy}$ e b_y variano. Dimensionalmente $\tilde{S}_{yy}$ è pari ad una lunghezza al cubo mentre b_y è una lunghezza, per tanto il loro rapporto è pari ad una lunghezza al quadrato. Va di conseguenza che l'andamento delle tensioni tangenziali è di tipo parabolico con massimo nel baricentro.

In campo plastico il taglio resistente viene così definito:

$$V_{z.Rd} = A_{V.z} \cdot \frac{f_y}{\sqrt{3} \cdot \gamma_{M0}}$$

Dove $A_{V.z}$ è quella porzione della sezione in grado di resistere al taglio. Nel caso di un profilo a H laminato tale area corrisponde all'area dell'anima del profilo.

8.7. Composizione delle tensioni

In campo elastico la composizione delle tensioni avviene per mezzo del criterio di resistenza di Von Mieses secondo il quale:

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} \leq \sigma_{amm}$$

Tale criterio permette di comporre le tensioni normali con quelle tangenziali in modo da creare una tensione ideale da confrontare con la tensione ammissibile del materiale.

FINE DOCUMENTO